УРОКИ № 60-61

Тема уроку. *Прикладні задачі. Розв'язування прямокутних трикутників.*

Мета уроку: *узагальнити й систематизувати знання учнів зданої теми; показати необхідність уміння розв'язувати прямокутні трикутники для вирішування практичних проблем; підготувати учнів до контрольної роботи.*

Тип уроку: *узагальнення та систематизація знань.*

Хід уроку

I. Організаційний момент

Учні розподіляються на групи по 5—6 осіб.

II. Перевірка домашнього завдання

Перевірку здійснюють у кожній групі консультанти і їхні помічники. Учитель перед уроком перевіряє виконання домашнього завдання у консультантів і дає їм необхідні інструкції.

III. Формулювання теми, мети і задач уроку

IV. Актуалізація опорних знань учнів

Можна здійснити у вигляді математичної вікторини. її може проводити як учитель, так і учень 9 або 10 класу, запрошений на урок.

Питання вікторини

1. У рівнобедреному трикутнику основа у два рази більша від висоти. Знайдіть кути трикутника. (Проведемо висоту й одержимо два рівнобедрених прямокутники: кути 45°, 45°, 90°.)
2. Чи можна різносторонній трикутник розрізати на два рівних трикутники? (Ні. Якщо розріз робити за висотою, то отримані трикутники матимуть різні гіпотенузи. Якщо різати за похилою, то в одному трикутнику одержимо тупий кут, який не може дорівнювати жодному з кутів другого трикутника.)
3. Є дошка прямокутної форми. Столярові потрібно відрізати кінець дошки під кутом 45°. Як це зробити? (Від вершини прямого кута відкласти за довжиною дошки відстань, рівну її ширині.)
4. Чи можна з 36 сірників, не ламаючи їх, скласти прямокутний трикутник? (Якщо сторони дорівнюють 3, 4, 5 — трикутник прямокутний. Якщо сторони $3n$, $4n$, $5n$ — теж прямокутний, n — будь-яке натуральне число, тому що $(3n) + (4n) – (5n)$. $P = 12n$. При $n = 3$ $P = 36$. Тобто сторони дорівнюють 9, 12, 15.)
5. Ставок має форму квадрата, по кутах якого ростуть дерева. Як збільшити площу ставка, не чіпаючи дерев, щоб він знову мав би форму квадрата? (*Відповідь:* див. рис. 1.)

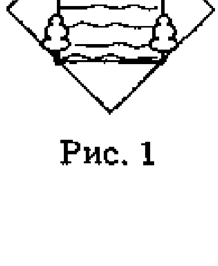

Рис. 1

V. Проведення конференції

Слово надається групі «Дослідники»

Доповідачі розповідають про піфагорові числа.

1-й доповідач. Крім чисел 3, 4, 5 існує, як відомо, безліч цілих додатних чисел *a, b, c,* які задовольняють співвідношенню $a^2 + b^2 = c^2$. Вони називаються піфагоровими числами. Відповідно до теореми Піфагора такі числа можуть бути довжинами сторін деякого прямокутного трикутника: *a, b* — катети, *c* — гіпотенуза. Таким чином, якщо *a, b, c* — піфагорова трійка, то для будь-якого натурального числа *n* числа *na, nb* і *nc* — теж піфагорові числа.

Розглянемо трійки взаємно простих чисел. Покажемо, що в кожній з таких трійок *a, b, c* один з «катетів» повинен бути парний, а інший непарний. Станемо міркувати «від противного». Якщо *a* і *b* парні, то парним буде $a^2 + b^2$, а отже, і «гіпотенуза». Це суперечить тому, що *a, b, c* взаємно прості. Таким чином, хоча б один із «катетів» *a, b* непарний.

Нехай обидва «катети» непарні, а «гіпотенуза» парна. Припустимо, катети мають вигляд $2x + 1$ і $2y + 1$, тоді сума їх квадратів дорівнює $4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y + y^2) + 2$, тобто являє собою число, яке при діленні на 4 дає в остачі 2. У той же час квадрат будь-якого парного числа ділиться на 4 без остачі. Отже, сума квадратів двох непарних чисел не може бути квадратом парного числа, іншими словами, ці три числа — не піфагорові.

Таким чином, із «катетів» *a* і *b* один парний, інший непарний. Тому число $a^2 + b^2$ непарне, отже, непарним є і число *c*. Ось, наприклад, деякі піфагорові числа: $3^2 + 4^2 = 5^2$; $7^2 + 24^2 = 25^2$; $11^2 + 60^2 = 61^2$; $15^2 + 8^2 = 17^2$; $33^2 + 56^2 = 65^2$; $35^2 + 12^2 = 37^2$; $55^2 + 48^2 = 73^2$; $63^2 + 16^2 = 65^2$.

Піфагорові числа мають ряд цікавих особливостей:

1. Один з «катетів» повинен бути кратним трьом.
2. Один з «катетів» повинен бути кратним чотирьом.
3. Одне з піфагорових чисел повинен ділитися на п'ять.

2-й доповідач. Зручний і дуже точний спосіб, уживаний землемірами для проведення на місцевості перпендикулярних ліній, полягає в наступному.

Нехай через точку А потрібно провести перпендикуляр до прямої *MN.* Відкладають від точки *A* на прямій *MN* чотири рази будь-яку відстань *a* (рис. 2). Потім зав'язують на шнурі три вузли, відстані між якими дорівнюють За і 5а. Приклавши крайні вузли до точок *A* і В, натягують шнур за середній вузол. Шнур набуває вигляду трикутника, у якому кут *A* — прямий. Цей давній спосіб, очевидно, застосовувався тисячоріччя тому будівельниками єгипетських пірамід. Він заснований на тому, що кожний трикутник, сторони якого відносяться як 3:4:5, відповідно до теореми Піфагора — прямокутний, оскільки $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Тому трикутник з катетами 3 і 4 і гіпотенузою 5 називають єгипетським.

Слово надається групі «Теоретики»

3-й доповідач. Доведемо теорему Піфагора, застосовуючи формули для обчислення площ квадратів і прямокутних трикутників.

Доведення

Побудуємо два квадрати зі сторонами *a* і *b,* як показано на рис. 3. Від точки *A* відкладемо відрізок завдовжки *a* ($AC = a$). Сполучимо точки *B* і С і на відрізку *BC* як на стороні побудуємо квадрат. Його площа дорівнює c^2. $AD = \quad = a + b$, $DC = b$, $BN = b$, $\angle 1 = \angle 2$ як кути з відповідно паралельними сторонами. Тоді

$\Delta KDC = \Delta MNB$ за катетом і гострим кутом. Аналогічно $\Delta CAB = = \Delta KLM$. Тому сума площ квадратів зі сторонами a і b дорівнює площі квадрата зі стороною с.

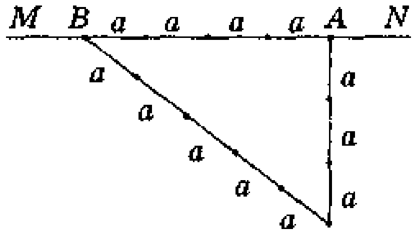

Рис. 2

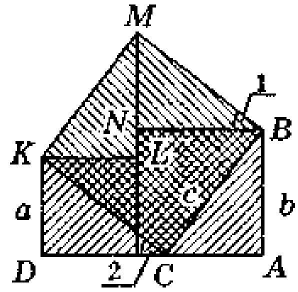

Рис. 3

Слово — групі «Практики»

4-й доповідач. Довгий час вважали, що теорема Піфагора до Піфагора не була відома, і тому вона носить його ім'я. Проте встановлено, що ця найважливіша теорема зустрічається у Вавилонських текстах, написаних за 1200 років до Піфагора. Єгиптяни придумали **задачу про лотос.**

На глибині 12 футів росте лотос із тринадцятифутовим стеблом. Визначте, на яку відстань квітка може відхилитися від вертикалі, яка проходить через точку кріплення стебла до дна (рис. 4).

Розв'язання

$d = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (футів).

Відповідь: 5 футів.

5-й доповідач. За рис. 5 визначимо висоту ялинки AH. Для цього позначимо точку B на певній відстані a від основи ялинки H і вимірюємо кут $\angle ABH = \alpha$. Тоді $AH = a\ \text{tg}\alpha$.

3-й доповідач. До стіни будинку заввишки 4 м поставлено драбину. На якій відстані від будинку потрібно її поставити, щоб вона була нахилена до землі під кутом 15°?

Розв'язання

Проведемо відрізок BM під кутом 30° до землі (рис. 6). Тоді $\angle CMB = 180° -- 30° = 150°$. Отже, $\angle CBM = \angle MCB = 180° - 150° - 15° = 15°$. Таким чином, трикутник CMB рівнобедрений з основою BC, тобто $CM = NB = 8$ м (оскільки в трикутнику MBA ($\angle A = 90°$) катет BA є протилежним куту 30°, отже, гіпотенуза у два рази більша). Із трикутника MBA ($\angle A = 90°$) $AM = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (м). Тоді $AC = CM + AM = 8 + 4\sqrt{3}$ (м).

Відповідь: $8 + 4\sqrt{3}$ м.

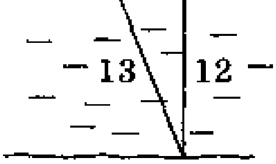

Рис. 4

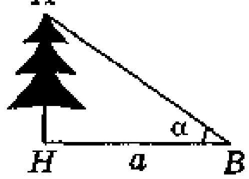

Рис. 5

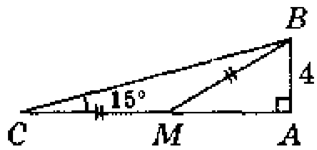

Рис. 6

VI. Розв'язування задач у групах

«Мозковий штурм»

Кожна група одержує картку із задачами, які потрібно розв'язати протягом 20—25 хвилин.

Картка

1. Бамбуковий стовбур заввишки 9 футів переломлений бурою так, що якщо верхню частину його пригнути до землі, то верхівка торкнеться землі на відстані 3 футів від основи стовбура. На якій висоті переломлений стовбур?
2. Ескалатор метрополітену має 17 сходинок від підлоги наземного вестибюля до підлоги підземної станції. Ширина сходинок 40 см, висота 30 см. Визначте: а) довжину сходинок; б) кут їх нахилу; в) глибину станції по вертикалі.

Задача 1. *Розв'язання*

Нехай стовбур переломлений на висоті x футів від землі, $BC = x$ (рис. 7). Тоді верхівка бамбука — точка A розміщена на відстані 3 футів від основи стовбура, $AC = 3$ фути. Тоді $AB = (9 - x)$ футів.

Маємо: $(9 - x)^2 - x^2 = 3^2$, $81 - 18x + x^2 - x^2 = 9$; $18x = 72$; $x = 4$.

Відповідь: 4 фути.

Задача 2. *Розв'язування*

У кожному маленькому прямокутному трикутнику (рис. 8) знайдемо довжину гіпотенузи: $\sqrt{40^2 + 30^2}$ = 50 (см). Таких відрізків 17. Отже, довжина сходинок 50 · 17 = 850 (см) = 85 (дм). Глибина станції за вертикаллю: 30 · 17 = = 510 (см) = 51 дм. Тоді кут нахилу сходинок знайдемо так: $\sin\alpha = \frac{51}{85} = 0{,}6$; $\alpha \approx 37°$.

Відповідь: 85 дм, 51 дм, 37°.

Захист робіт

Учні пояснюють розв'язання задач, супроводжуючи пояснення записами на дошці. Після захисту задач групи ставлять одна одній питання: перша група — другій, друга — третій і т. д. Приклади усних питань:

1. Визначте синус, косинус і тангенс кута А на рис. 9.
2. На рис. 10 $tgR = \frac{12}{35}$. Яким числам пропорційні катети трикутника?
3. Чому дорівнюють катети рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює $4\sqrt{2}$ см?
4. Чому дорівнює гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо обидва його катети дорівнюють 5 см?

VII. Підбиття підсумків уроку

1. Консультанти груп і вчитель оцінюють роботу групи в цілому й кожного учня окремо.
2. Кожний учень піднімає кольоровий квадрат: «зелений» — задоволений своєю роботою на уроці, очікування виправдалися; «жовтий» — не дуже задоволений собою; «червоний» — не задоволений. Учитель з'ясовує причини, за якими учень не досяг бажаних результатів, визначає, що потрібно виправити, над чим попрацювати, на що звернути увагу під час підготовки до контрольної роботи.

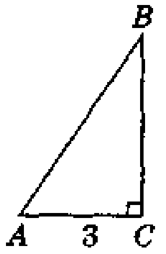

Рис. 7

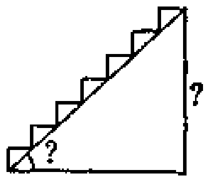

Рис. 8

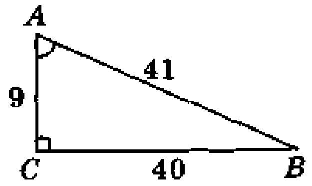

Рис. 9

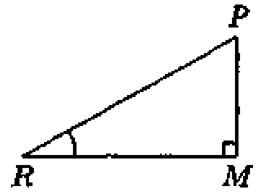

Рис. 10

VIII. Домашнє завдання

С 1. Між двома площадками на одному поверсі потрібно укласти на металевих балках бетонні щаблі. Під яким кутом до обрію слід закріпити балки, якщо підйом щабля дорівнює 15,5 см, а ширина — 32,5 см?

Д 2. Один із катетів прямокутного трикутника більший від другого на 3 см, а відношення гіпотенузи до катета дорівнює 5 : 4. Знайдіть сторони трикутника.

Д 3. У прямокутній трапеції один із кутів дорівнює 135°, середня лінія — 18 см, а основи відносяться як 1 : 8. Знайдіть меншу бічну сторону.

В 4. Діагональ прямокутника дорівнює 52 мм, а сторони відносяться як 5 : 12. Знайдіть його периметр.

В 5. Підготуватися до контрольної роботи, повторити теоретичний матеріал з теми «Розв'язування трикутників».