УРОК № 59

Тема уроку. *Розв'язування прямокутних трикутників.*

Мета уроку: *навчати учнів застосовувати правила знаходження катета і гіпотенузи при розв'язуванні задач.*

Тип уроку: *формування вмінь і навичок учнів.*

Хід уроку

І. Перевірка домашнього завдання

Проводиться у формі самостійної роботи, яка містить задачі, подібні до домашніх. Самостійна робота пишеться під копірку й перевіряється відразу після написання.

Самостійна робота

Варіант І

1. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють $7{,}5\sqrt{3}$ см і 7,5 см.
2. Різниця основ рівнобедреної трапеції дорівнює 4,8 см. Косинус гострого кута при основі трапеції дорівнює 0,6. Знайдіть довжину бічної сторони трапеції.

Варіант ІІ

1. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють $3{,}2\sqrt{3}$ см і 3,2 см.
2. Різниця двох основ прямокутної трапеції дорівнює 10 см. Косинус гострого кута при основі трапеції становить 0,7. Знайдіть довжину більшої бічної сторони трапеції.

Наведемо розв'язання задач варіанта І.

Задача 1. *Розв'язання*

Нехай у трикутнику *ACB* (рис. 1) $\angle C = 90°$, $AC = 7{,}5\sqrt{3}$ см, $BC = 7{,}5$ см. $tgA = \frac{BC}{AC} = \frac{7{,}5}{7{,}5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тоді $\angle A = 30°$; $\angle B = 90° - 30° = 60°$.

Відповідь: 30°, 60°.

Задача 2. *Розв'язання*

Нехай у трапеції *ABCD* (рис. 2) $BC \parallel AD$, $AB = CD$. Проведемо висоту *CK* ($CK \perp AD$). За умовою $AD – BC = 4{,}8$ см, тоді $KD = 2{,}4$ см. Отже, $\cos D = \frac{KD}{CD} = 0{,}6$; $\frac{2{,}4}{CD} = 0{,}6$; $CD = \frac{2{,}4}{\frac{3}{5}} = \frac{2{,}4 \cdot 5}{3} = 0{,}8 \cdot 5 = 4$ (см).

Відповідь: 4 см.

Після самостійної роботи вчитель демонструє розв'язання домашньої задачі 3, заздалегідь записане на відкидній дошці, і розбирає його.

Розв'язання задачі 3 домашнього завдання

У трикутнику *ACB* ($\angle C = 90°$) проведемо висоту *CD* ($CD \perp AB$) (рис. 3). *BD* і *AD* — проекції відповідно катетів *BC* і *AC* на гіпотенузу.

Нехай $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{3}$, тоді $BD = x$ см ($x > 0$); $AD = 3x$, $CD^2 = BD \cdot AD = 3x^2$, $CD = = x\sqrt{3}$. Із трикутника CDB ($\angle D = 90°$): $\text{tg}B = \frac{CD}{BD} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$. Звідси $\angle$ В = 60°, $\angle A = 90° - \angle B = 90° - 60° = 30°$.

Відповідь: 60°, 30°.

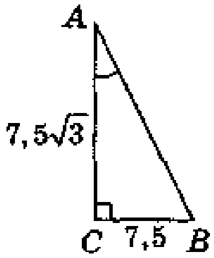

Рис. 1

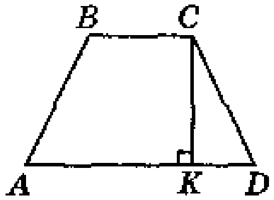

Рис. 2

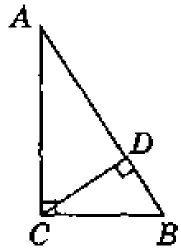

Рис. 3

II. Актуалізація опорних знань учнів

Учні, працюючи в парах, ставлять один одному теоретичні питання з теми. За необхідності звертаються до підручника. Учитель вибірково опитує декілька пар.

III. Формулювання теми, мети і задач уроку

IV. Закріплення навичок і вмінь учнів розв'язувати прямокутні трикутники

Задача 1 *(розв'язується колективно, один учень біля дошки).* Один з кутів трапеції дорівнює 30°, а прямі, які містять бічні сторони трапеції, перетинаються під прямим кутом. Знайдіть довжину меншої бічної сторони, якщо її середня лінія дорівнює 10 см, а одна з основ — 8 см.

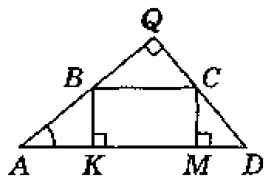

Рис. 4

Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) її бічні сторони при продовженні перетинаються в точці Q, $\angle Q = 90°$ за умовою (рис. 4). Тоді в трикутнику AQD $\angle D = 90° - \angle A = 90° - 30° = 60°$. Оскільки середня лінія трапеції дорівнює $\frac{BC + AD}{2} = 10$ (см), то $8 + AD = 20$, $AD = 12$ см. Проведемо висоти BK ($BK \perp AD$) і CM ($CM \perp AD$). Нехай $AK = x$ см ($x > 0$), тоді $MD = (AD - BC) - AK = (12 - 8) - x = 4 - x$. У трикутнику AKB ($\angle$ С = 90°) $BK = AK \cdot \text{tg}\angle K = x\ tg\ 30° = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. У трикутнику CMD ($\angle M = 90°$) $CM = = MD\ tg\angle D = (4 - x)$ tg 60° $= (4 - x) \cdot \sqrt{3}$. Оскільки $CM = BK$, то маємо рівняння: $\frac{x\sqrt{3}}{3} = (4 - x) \cdot \sqrt{3}$; $x\sqrt{3} = 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3}x$; $4x\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$; $x = 3$. Отже, $AK = 3$ см; $MD = 1$ см. Із прямокутного трикутника ABK із прямим кутом K

маємо: $AB = \ = \frac{AK}{\cos\angle A} = \frac{3}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ (см). Із прямокутного трикутника MCD ($\angle M = = 90°$): $CD = \frac{MD}{\cos\angle D} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$ (см). $CD < AB$.

Відповідь: 2 см.

Задача 2 *(учні розв'язують самостійно, один із сильних учнів працює на відкидній дошці)*

Дано: $AB = BC$, $\angle C = \alpha$, $AD \perp BC$, $AD = h$ (рис. 5).

Знайти: AB.

Розв'язання

Оскільки за умовою трикутник ABC рівнобедрений з основою AC (рис. 5), то $\angle A = \angle D = \alpha$, отже, $\angle B = 180° - 2\angle D = 180° - 2\alpha$. Розглянемо трикутник ABD ($\angle D = 90°$): $AD = h$, $\angle B = 180° - 2\alpha$, $AB = \frac{AD}{\sin\angle B} = \frac{h}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$.

Відповідь: $\frac{h}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$.

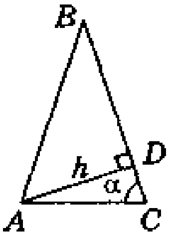

Рис. 5

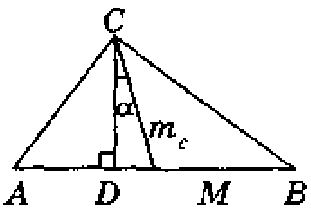

Рис. 6

Задача 3 *(розв'язується колективно).* У трикутнику ABC $\angle ACB = 90°$, $CD \perp AB$. CM — медіана, $CM = m_c$, $\angle DCN = \alpha$ (рис. 6). Знайдіть $S_{\Delta ABC}$ і катети трикутника ACB.

Розв'язання

Із трикутника CDM ($\angle D = 90°$) $CD = CM \cos\angle DCM = m_c \cos\alpha$; $DM = = CM \sin\angle DCM = m_c \sin\alpha$. Як відомо, $CM = \frac{1}{2}AB$, тоді $AB = 2CM = 2m_c$. Звідси $AM = MB = m_c$. Тому $S_{\Delta ACB} = \frac{CD \cdot AB}{2} = \frac{m_c \cos\alpha \cdot 2m_c}{2} = m_c^2 \cos\alpha$. $AD = AM - DM = = m_c - m_c \sin\alpha$.

Із трикутника ADC ($\angle D = 90°$):

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{(m_c - m_c \sin\alpha)^2 + (m_c \cos\alpha)^2} = m_c\sqrt{(1-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha}.$$

Із трикутника ACB ($\angle C = 90°$):

$$CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4m_c^2 - m_c^2\left((1-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha\right)^2} = m_c\sqrt{4 - \left((1-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha\right)^2}.$$

Відповідь: $m_c^2 \cos\alpha$; $m_c\sqrt{(1-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha}$; $m_c\sqrt{4-\left((1-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha\right)^2}$.

Задача 4 *(учні розв'язують самостійно, відповідаючи на питання вчителя під час розв'язання задачі).* У рівнобедреній трапеції *ABCD* $AB = CD = 7$ см, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см. Знайдіть синус і косинус кута *CAD*.

Розв'язання

Нехай *ABCD* — дана рівнобічна трапеція (рис. 7), $AD \parallel BC$. Проведемо висоту *BK* ($BK \perp AD$). Тоді $AK = \dfrac{AD-BC}{2} = \dfrac{8-2}{2} = 3$ (см). У трикутнику *ABK* ($\angle K = 90°$): $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{49-9} = 2\sqrt{10}$ (см). $BK = CM$ ($CM \perp AD$), $AM = KM + AK = BC + AK = 2 + 3 = 5$ (см). Із трикутника *CAM* ($\angle M = 90°$) $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{25+40} = \sqrt{65}$, $\sin\angle CAM = \dfrac{CM}{AC} = = \dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{65}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{13}}$, $\cos\angle CAM = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{5}{\sqrt{65}} = \dfrac{5\cdot\sqrt{65}}{65} = \dfrac{\sqrt{65}}{13}$.

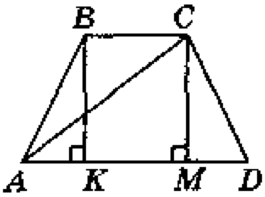

Рис. 7

Відповідь: $2\sqrt{\dfrac{2}{13}}$; $\dfrac{\sqrt{65}}{13}$.

Задача 5. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α, а радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює *r*. Визначите бічну сторону трикутника.

Розв'язання

Нехай *ABC* (рис. 8) — даний рівнобедрений трикутник з основою *AC*, $\angle A = \angle C = \alpha$ У прямокутному трикутнику *AKO* ($\angle K = 90°$): $AK = \dfrac{r}{tg\dfrac{\alpha}{2}}$ ($\angle KAO = \dfrac{1}{2}\angle A = \dfrac{\alpha}{2}$, тому що *AO* — бісектриса кута *A*). Із прямокутного трикутника *ABD* ($\angle D = 90°$, оскільки точка *D* — точка дотику кола з основою *AC*) $\angle ABD = 90° - \alpha$. Тоді в трикутнику *OKB* ($\angle K = 90°$): $\angle BOK = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ і $BK = r\,\mathrm{tg}\alpha$. Отже, $AB = AK + BK = \dfrac{r}{tg\dfrac{\alpha}{2}} + rtg\alpha$.

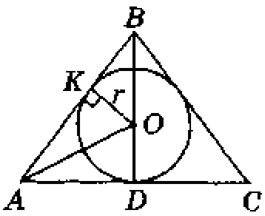

Рис. 8

Відповідь: $\dfrac{r}{tg\dfrac{\alpha}{2}} + rtg\alpha$.

V. Підбиття підсумків уроку

Питання класу

1. Які теоретичні знання знадобилися вам сьогодні під час розв'язування задач?
2. Оцініть свою роботу на уроці.

3. Чи досягнута мета уроку?

VI. Домашнє завдання

С 1. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а висота, проведена до основи, — $5\sqrt{3}$ см. Знайдіть кути трикутника.

Д 2. Діагональ прямокутника дорівнює 8 см, а одна з його сторін — $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника.

В 3. Бічні сторони прямокутної трапеції відносяться як 1: $\sqrt{2}$ Знайдіть кути трапеції.

4. Підготуватися до узагальнюючого уроку-конференції. Знайти спосіб доведення теореми Піфагора, який не був розглянутий на уроках. Знайти відомості про піфагорові числа, єгипетський трикутник.