УРОК № 55

Тема уроку. *Співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника.*

Мета уроку: *учити учнів розв'язувати прямокутний трикутник.*

Тип уроку: *засвоєння нових знань.*

Хід уроку

I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання

Задачі 1 і 2 розбираються усно з коментарями вчителя. У цей час учень записує на дошці розв'язання задачі 3, яке потім обговорюється.

Задача 3. *Розв'язування*

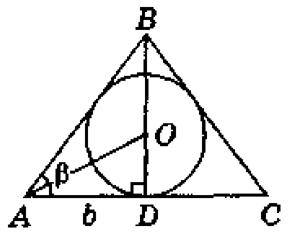

Рис. 1

Нехай у трикутнику ABC (рис. 1) $AB = BC$, у нього вписане коло; $\angle A = \beta$; $AC = b$. Оскільки в трикутник вписане коло, то його центр лежить на перетині бісектрис, тобто AO — бісектриса і $\angle OAD = \angle BAO = \frac{\beta}{2}$. Оскільки трикутник ABC — рівнобедрений, то BD — висота, медіана і бісектриса, тобто $AD = DC = \frac{b}{2}$. Із трикутника ODA ($\angle D = 90°$): $OD = r$; $tg\frac{\beta}{2} = \frac{OD}{\frac{b}{2}}$; звідси $OD = \frac{b}{2} \cdot \text{tg}\,\frac{\beta}{2}$.

Відповідь: $\frac{b}{2}\,\text{tg}\,\frac{\beta}{2}$.

II. Формулювання мети і задач уроку

III. Актуалізація опорних знань учнів

Бліц-опитування груп

1. Що називається синусом гострого кута (рис. 2)?
2. Що називається косинусом гострого кута (рис. 2)?
3. Що називається тангенсом гострого кута (рис. 2)?
4. Як називаються сторони прямокутного трикутника (рис. 2)?
5. Чи залежить косинус, синус, тангенс кута від розмірів трикутника?
6. Чому дорівнюють синуси гострих кутів α і β у прямокутному трикутнику на рис. 3?
7. Чому дорівнюють тангенси гострих кутів α і β у прямокутному трикутнику на рис. 4?

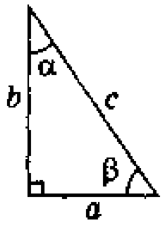

Рис. 2

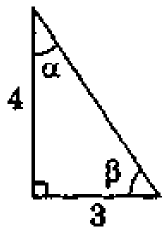

Рис. 3

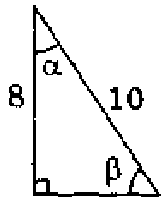

Рис. 4

IV. Вивчення нового матеріалу

Отже, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$,

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\sin\beta = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$,

де α і β — відповідні гострі кути прямокутного трикутника (рис. 5). Виразимо катети і гіпотенузу через sin α, sin β, cos α, cos β, tg α, tg β.

$$a = c \cdot \sin\alpha;\ a = c \cdot \cos\beta;\ b = c \cdot \cos\alpha;\ b = c \sin\beta;$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha;\ b = a \cdot \operatorname{tg}\beta;\ c = \frac{a}{\sin\alpha};\ c = \frac{a}{\cos\beta}.$$

Зверніть увагу на те, що катет завжди знаходиться множенням, а гіпотенуза — діленням. Запишемо правила в зошитах (див. також рис. 6 і 7).

1. Катет, протилежний куту α, дорівнює добутку гіпотенузи на sin α.
2. Катет, прилеглий до кута α, дорівнює добутку гіпотенузи на cos α.
3. Катет, протилежний куту α, дорівнює добутку другого катета на tg α.
4. Катет, прилеглий до кута α, дорівнює частці від ділення другого катета на tg α.
5. Гіпотенуза дорівнює частці від ділення катета на синус кута, протилежного цьому катету.
6. Гіпотенуза дорівнює частці від ділення катета на косинус кута, прилежного до цього катета.

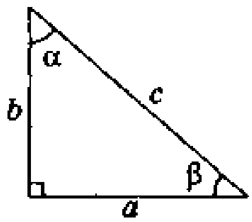

Рис. 5

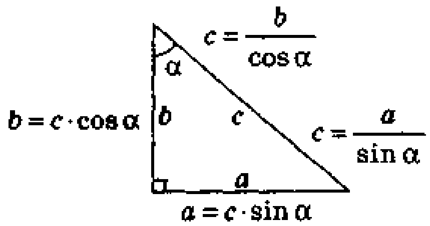

Рис. 6

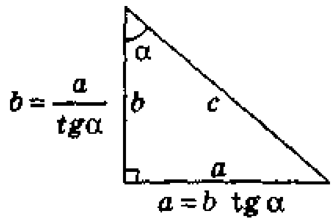

Рис. 7

V. Первинне закріплення нових знань учнів

Завдання групам

Групи виконують завдання за підготовленими на дошці рисунками (рис. 8, *а-є*). Відповідає група, яка першою впоралася з усіма завданнями, інші перевіряють свої відповіді, ставлять питання.

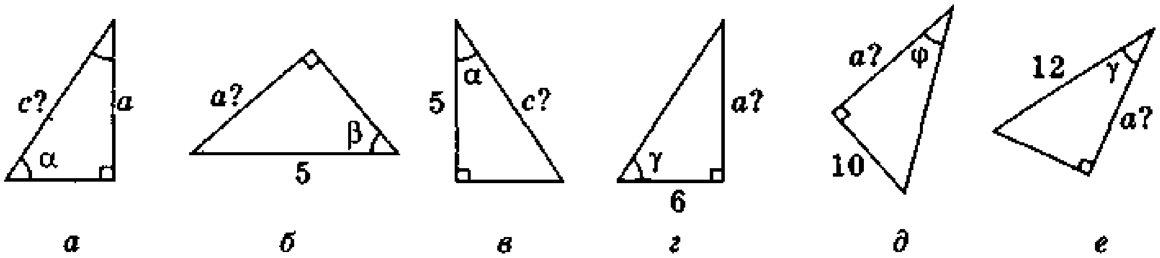

Рис. 8

Розв'язування задач

Задача 1. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює *c,* гострий кут дорівнює α. Знайдіть катети, їх проекції на гіпотенузу й висоту, опущену на гіпотенузу.

Розв'язання

У трикутнику *ACB* ($\angle C = 90°$) (рис. 9) AC = ABsina = csina; *BC = c* cosa. У трикутнику *CDB* ($\angle D = 90°$) $CD = BC \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$. $BD = BC \cdot$ cosa = $= c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos^2\alpha$. У трикутнику *ACB* ($\angle C = 90°$) $\angle A = 90° - \alpha$, тоді $\angle ACD = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. У трикутнику *ADC* ($\angle D = 90°$) $AD = AC \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha = c \sin^2\alpha$.

Відповідь: $c{\cdot}\sin\alpha$; $c{\cdot}\cos\alpha$; $c{\cdot}\cos^2\alpha$; $c{\cdot}\sin^2\alpha$; $c{\cdot}\cos\alpha{\cdot}\sin\alpha$.

Зауваження. Для sin α, cos α, tg α складені спеціальні таблиці, завдяки яким можна за даним кутом α знайти значення sin α, cos α, tg α або за значеннями sin α, cos α, tg α знайти відповідний кут. Зараз для цього зазвичай використовують калькулятор.

Задача 2. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, а бічна сторона — *b*. Знайдіть основу й висоту трикутника, проведену до основи.

Розв'язання

Оскільки трикутник *ABC* (рис. 10) — рівнобедрений, то висота *BD* є і медіаною, тоді *AD = DC.* У трикутнику *ADB* ($\angle D = 90°$): $BD = b \sin\alpha$; $AD = b \cos\alpha$, тоді $AC = 2b \cos\alpha$.

Відповідь: $2b \cos\alpha$; $b \sin\alpha$.

Задача 3.

Дано: $\angle ACB = 90°$, $CM = m$, *CM* — медіана, $\angle B = \beta$ (рис. 11).

Знайти: *AC.*

Розв'язання

Оскільки *CM* — медіана, проведена до гіпотенузи, то $AB = 2m$. Тоді із трикутника *ACB* ($\angle C = 90°$): $AC = AB \sin\beta = 2m \sin\beta$.

Відповідь: $2m \sin\beta$.

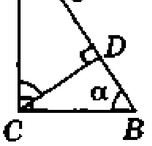

Рис. 9

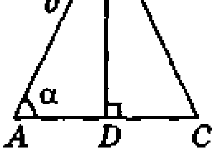

Рис. 10

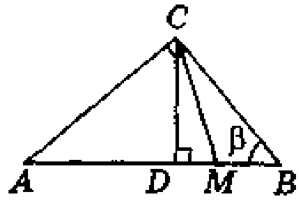

Рис. 11

Задача 4. За даними рис. 12 (*а-б*) визначте довжини відрізків *AD* і *CD.*

Розв'язання

а) Із трикутника BCA ($\angle C = 90°$): $AC = a \cdot \mathrm{tg}\alpha$.
Із трикутника ADC ($\angle D = 90°$): $AD = AC \cdot \cos\beta = a\,\mathrm{tg}\alpha \cdot \cos\beta$.
$CD = AC \cdot \sin\beta = a\,\mathrm{tg}\alpha \cdot \sin\beta$.

б) Із трикутника ABC ($\angle B = 90°$): $AC = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Із трикутника CAD ($\angle A = 90°$): $AD = \dfrac{\frac{a}{\sin\alpha}}{tg\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha \cdot tg\gamma}$; $CD = \dfrac{\frac{a}{\sin\alpha}}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$.

Відповідь: $\dfrac{a}{\sin\alpha \cdot tg\gamma}$; $\dfrac{a}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$.

Задача 5. У рівнобедреній трапеції більша основа дорівнює a, а висота h утворює з бічною стороною кут β. Знайдіть периметр трапеції.

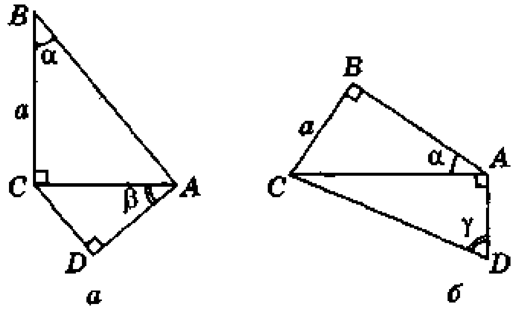

Рис. 12

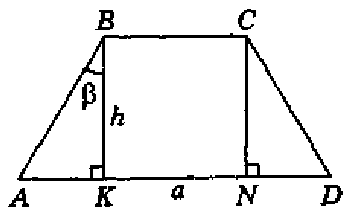

Рис. 13

Розв'язання

У рівнобедреній трапеції $ABCD$ (рис. 13) проведемо висоту BK ($BK \perp AD$), тоді із трикутника AKB ($\angle K = 90°$): $AK = h\mathrm{tg}\beta$; $AB = \dfrac{h}{\cos\beta}$. Оскільки трапеція є рівнобедреною, то $AK = ND = h\,\mathrm{tg}\,\beta$. Тоді $KN = BC = a - 2h\,\mathrm{tg}\beta$.

$$P_{ABCD} = 2AB + BC + AD = \frac{2h}{\cos\beta} + a - 2h\,\mathrm{tg}\beta + a = \frac{2h}{\cos\beta} + 2a - 2h\,\mathrm{tg}\beta.$$

Відповідь: $\dfrac{2h}{\cos\beta} + 2a - 2h\,\mathrm{tg}\beta$.

VI. Підбиття підсумків уроку

Питання класу

1. Що нового ви дізналися на уроці?
2. Що навчилися робити?
3. Чи досягли ви очікуваних результатів?
4. Як знайти катет, який лежить проти гострого кута φ, прилеглий до кута φ, якщо відома гіпотенуза?
5. Як можна знайти гіпотенузу, якщо відомі гострий кут φ і прилеглий до нього катет; протилежний йому катет?

VII. Домашнє завдання

С 1. Дано: ΔABC; $BD \perp AC$; $\angle A = \alpha$; $\angle C = \gamma$, $AB = a$ (рис. 14) Знайти: AC.

Д 2. У прямокутному трикутнику АВС (рис. 15) $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle KAC = \beta$. Знайдіть довжину відрізка BK.

В 3. Дано: ΔABC, $AB = BC$, $\angle B = \beta$, $AD \perp BC$, $AD = h$ (рис. 16) Знайти: AC.

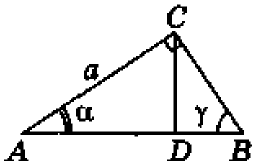

Рис. 14

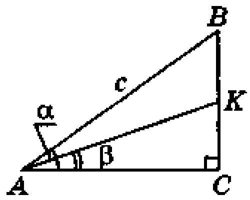

Рис. 15

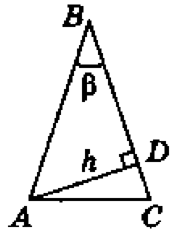

Рис. 16