УРОК № 54

Тема уроку. *Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника.*

Мета уроку: *ознайомити учнів з означенням синуса, косинуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, учити обчислювати синус, косинус, тангенс кута й будувати кут за його косинусом, синусом, тангенсом.*

Тип уроку: *засвоєння нових знань.*

Хід уроку

I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання

Задача 1 перевіряється усно з коментарями. Двоє учнів записують розв'язання задач 2 і 3 на дошці.

III. Формулювання теми, мети і задач уроку

IV. Актуалізація опорних знань учнів

Питання класу

1. Як називаються сторони прямокутного трикутника?
2. Назвіть гіпотенузу й катети кожного прямокутного трикутника, прилеглий до зазначеного гострого кута і протилежний йому (рис. 1, *а-в*).

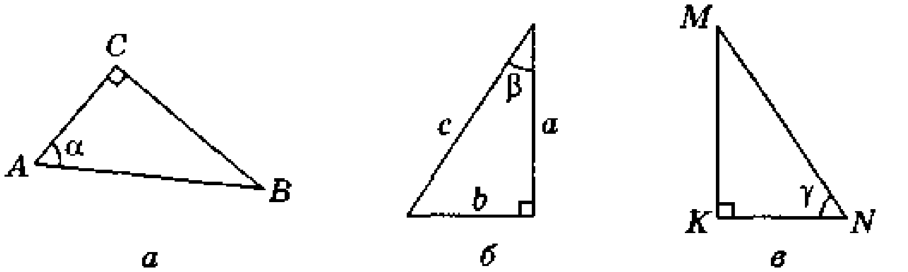

Рис. 1

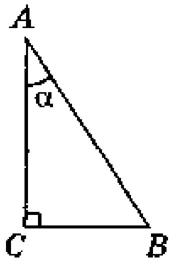

Рис. 2

V. Вивчення нового матеріалу

Нехай у трикутнику ABC (рис. 2), $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$.

Синусом кута α (позначається: sin α) називається відношення протилежного катета *BC* до гіпотенузи *AB:* $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$.

Косинусом кута α (позначається: cos α) називається відношення прилеглого катета AC до гіпотенузи *AB:* $\cos\alpha = \frac{AC}{BC}$.

Тангенсом кута α (позначається: tg α) називається відношення протилежного катета *BC* до прилеглого катета *AC:* $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC}$.

Розглядаємо ще раз трикутники на дошці (див. рис. 1, *а-в*) і запишемо, чому дорівнюють синуси, косинуси, тангенси зазначених кутів.

а) sinα = $\frac{BC}{AB}$; cosα = $\frac{AC}{AB}$; tgα = $\frac{BC}{AC}$;

б) sin β = $\frac{b}{c}$; cosβ = $\frac{a}{c}$; tgβ = $\frac{b}{a}$;

в) sinγ = $\frac{MK}{MN}$; cosγ = $\frac{KN}{MN}$; tgγ = $\frac{MK}{KN}$.

Твердження. Синус, косинус, тангенс залежать тільки від величини кута.

Завдання класу

Розв'яжіть задачі за готовими рисунками.

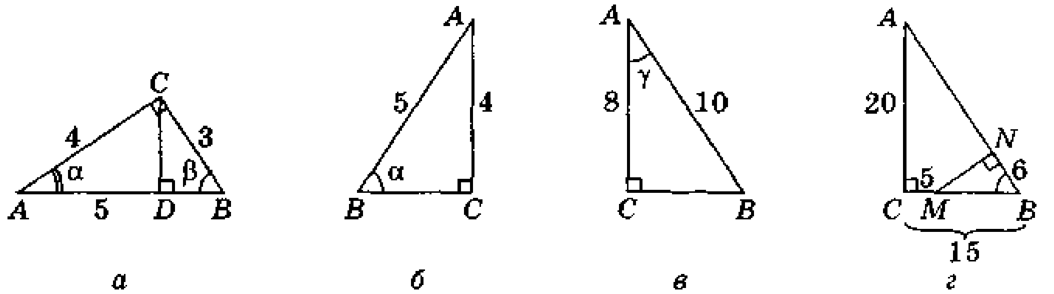

Рис. 3

1. Користуючись рис. 3, а, визначте, чому дорівнюють: cosα і sinβ (із трикутника *ACB*); cosα і sinβ (із трикутників *ADC* і *BDC* відповідно). Який можна зробити висновок?
2. Чому дорівнює tgα на рис. 3, *б*?
3. Чому дорівнює sinγ, cosγ, tgγ на рис. 3, в?
4. Обчисліть cos $\angle$B із трикутника *MNB;* sin $\angle A$ із трикутника *ACB* (рис. 3, *г*).

Розв'язання задач

1. На рис. 3, а AB = 5; cosα = $\frac{4}{5}$; sinβ = $\frac{4}{5}$ (ΔACB). CD = $\frac{4\cdot 3}{5}$ = $\frac{12}{5}$ = 2,4; cosα = $\frac{AD}{AC}$. Із трикутника ADC ($\angle D$ = 90°): AD = $\sqrt{AC^2-DC^2}$ = = $\sqrt{16-5{,}76}$ = $\sqrt{10{,}24}$ = 3,2. cosα = $\frac{3{,}2}{4}$ = $\frac{32}{40}$ = $\frac{4}{5}$ (або $AC^2 = AD\cdot AB$; $4^2 = AD\cdot 5$; AD = $\frac{16}{5}$ = 3,2). Із трикутника CDB ($\angle D$ = 90°): sinβ = $\frac{DC}{BC}$ = = $\frac{2{,}4}{3}$ = $\frac{24}{30}$ = $\frac{4}{5}$. Як бачимо, синус і косинус залежать тільки від величини кута. І в прямокутному трикутнику синус і косинус двох гострих кутів α і β є рівними.
2. Розв'язуємо усно (рис. 3, *б*). tgα = $\frac{AC}{BC}$; BC = 3; tgα = $\frac{4}{3}$.
3. Розв'язуємо усно (рис. 3, *в*). sinγ = $\frac{BC}{AB}$; BC = 6; sinγ = $\frac{6}{10}$ = $\frac{3}{5}$; cosγ = $\frac{AC}{AB}$

$= = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\gamma = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

4. Із трикутника *MNB* ($\angle N = 90°$) (рис. 3, *г*): $\cos\angle B = \frac{BN}{MN}$; $BM = 15 - 5 = 10$. $MN = 8$; $\cos\angle B = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Із трикутника *ACB* ($\angle C = 90°$): $\sin\angle A = \frac{BC}{AB}$; $AB = 25$; $\sin\angle A = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

Зауваження. Під час розв'язування задач учні повинні швидко знаходити гіпотенузу, якщо катети дорівнюють 3 і 4 (єгипетський трикутник), а також якщо катети відносяться як 3 : 4 ($a = 3$, $b = 4$, $c = 5$; $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$; $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$).

За допомогою косинуса можна довести й **теорему Піфагора:** У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Доведення

Нехай у трикутнику *ABC* (рис. 4) $\angle C = 90°$. Проведемо висоту *CD* ($CD \perp AB$). Із трикутника *ADC* ($\angle D = 90°$): $\cos A = \frac{AD}{AC}$. Із трикутника *ACB* ($\angle C = 90°$): $\cos A = \frac{AC}{AB}$. Звідси $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$; $AD \cdot AB = AC^2$. Аналогічно $\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$; $BD \cdot AB = BC^2$. Додавши рівності почленно і враховуючи те, що $AD + BD = = AB$, маємо: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD$; $AC^2 + BC^2 = = AB(AD + BD)$; $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AB$; $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Теорему доведено.

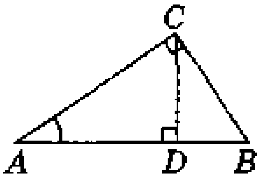

Рис. 4

Оскільки з теореми Піфагора випливає, що в прямокутному трикутнику кожен із катетів менший за гіпотенузи, то звідси, у свою чергу, випливає, що $\cos\alpha < 1$ і $\sin\alpha < 1$ для будь-якого гострого кута α.

Питання класу

- Для якого гострого кута тангенс кута дорівнює 1? (Для кута 45°. Оскільки тангенс кута — це відношення протилежного катета до прилеглого, то катети рівні. Отже, прямокутний трикутник — рівнобедрений, його гострі кути становлять по 45°.)

VI. Первинне закріплення нових знань учнів

Учні розподіляються на три групи. На дошці таблиця, яку учні заповнюють у зошитах, користуючись рис. 5 і 6, кожна група свій стовпчик: 1-а — синус, 2-а — косинус; 3-я — тангенс. Після виконання завдання під час перевірки учні заповнюють таблицю повністю.

Кути	Трикутники	Синус кута	Косинус кута	Тангенс кута
α	ΔABC			
β	ΔABC			

γ	ΔMNK			
φ	ΔMNK			

Задача. Побудуйте кут α так, щоб: а) cosα = 0,8; б) sinα = 0,6; в) tgα = 0,6.

Розв'язання

Нехай cosα= 0,8 = $\frac{4}{5}$. Будуємо пряму, подзначаємо точку *A* (рис. 7). Відкладаємо відрізок, який дорівнює 4 одиниці. Розхилом циркуля у 5 одиниць із точки *A* проведемо дугу до перетину з перпендикуляром, проведеним із точки *C*. Позначаємо точку перетину *B*. Сполучаючи точки *B* і *A*, будуємо прямокутний трикутник, у якого відношення прилеглого катета до гіпотенузи дорівнює даному значенню косинуса. Аналогічно будуємо для sinα = 0,6; tgα = 0,6.

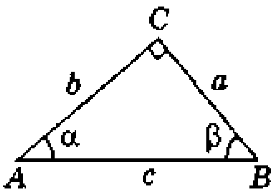

Рис. 5

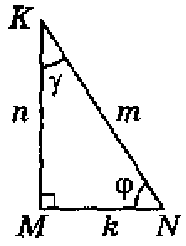

Рис. 6

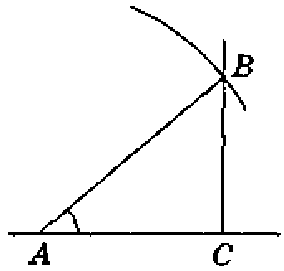

Рис. 7

VII. Підбиття підсумків уроку

Питання класу

1. Що нового ви дізналися на уроці?
2. Що називається синусом, косинусом, тангенсом гострого кута а?
3. Від чого залежить значення синуса, косинуса й тангенса кута?
4. Як побудувати кут а, якщо відомий його синус, косинус або тангенс?
5. Сформулюйте ідею доведення теореми Піфагора за допомогою косинуса гострого кута прямокутного трикутника.

VIII. Домашнє завдання

С 1. У прямокутному трикутнику *ABC* (∠ *C* = 90°) *AB* = 13 см, *AC* = 5 см. Знайдіть sin *B*, cos *B*, *tg B*.

Д 2. Побудуйте кути: косинус першого дорівнює $\frac{4}{9}$; синус другого — 0,5; тангенс третього — 0,4.

В 3. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює β, основа дорівнює *b*. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.