УРОК №49

Тема уроку. *Теорема Піфагора.*
Мета уроку: *сформулювати й довести декількома способами теорему Піфагора; учити застосовувати її при розв'язуванні задач.*
Тип уроку: *урок засвоєння нових знань.*
Обладнання: *портрет Піфагора, креслярські інструменти.*

Хід уроку

I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання

Учитель збирає зошити з домашньою контрольною роботою, проводить короткий аналіз тематичної контрольної роботи № 4, повідомляє її результати.

Ш. Формулювання мети і задач уроку

IV. Актуалізація опорних знань учнів

Розв'язування усних задач за готовими рисунками

1. За даними рис. 1 знайдіть площу чотирикутника *ABCD,* якщо $AB = 3$ см, $BC = 2$ см.
2. Доведіть, що чотирикутник *KMNP* (рис. 2) — квадрат.

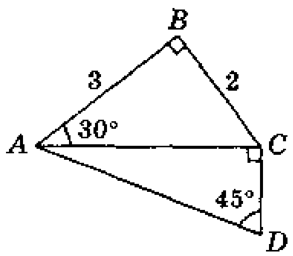


Рис. 1

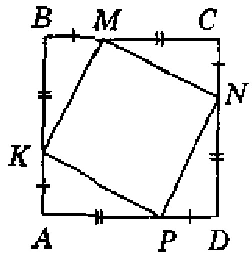


Рис. 2

Питання класу

1. Які ви знаєте формули для обчислення площ квадрата, прямокутного трикутника, трапеції?
2. Сформулюйте властивості пропорційних відрізків, означення подібних трикутників, ознаки подібних трикутників.

V. Вивчення нового матеріалу

Розповідь учителя про Піфагора і теорему Піфагора

Теорема Піфагора по праву вважається найважливішою в курсі геометрії й заслуговує на пильну увагу. Вона є основою розв'язування багатьох геометричних задач і базою вивчення теоретичного курсу надалі; містить багатий історичний матеріал. Теорема Піфагора — це основа евклідової геометрії, завдяки їй доводиться більшість теорем геометрії, тому її необхідно добре засвоїти. Сьогодні у нас урок однієї теореми, на якому ви будете знаходити різні способи доведення теореми Піфагора, застосовуючи при цьому знання різних розділів планіметрії. У світі відомо близько 100 різних доведень теореми. Можливо, ви знайдете свій оригінальний спосіб доведення.

Історична довідка (підготовлена двома учнями)

Доведення теореми Піфагора

Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Доведення 1. Доведемо теорему Піфагора, застосовуючи подібність трикутників.

Доведення

$\Delta ACB \backsim \Delta CKB$ (рис. 3), оскільки вони прямокутні і $\angle B$ — спільний, тоді $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BK}{BC}$, звідси $BC^2 = AB \cdot BK$ (або відразу можна використати той факт, що катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою та проекцією цього катета на гіпотенузу). Аналогічно $\Delta ACB \backsim \Delta AKC$, тоді $\dfrac{AC}{AK} = \dfrac{AB}{AC}$, звідси $AC^2 = AK \cdot AB$. Отже, $AC^2 + BC^2 = AB \cdot BK + AK \cdot AB =$ $= AB(BK + AK) = AB \cdot AB = AB^2$, що й треба було довести.

Доведення 2. Доведемо теорему, застосовуючи формули площ прямокутного трикутника, трапеції.

Доведення

Нехай $\angle BKC = \alpha$ (рис. 4). Оскільки $\Delta KBC = \Delta DAK$, то і $\angle ADK = \alpha$, отже, $\angle AKD = 90° - \alpha$, тому $\angle CKD = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$.

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot AB = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{(a+b)^2}{2}.$$

$$S_{ABCD} = S_{\Delta KBC} + S_{\Delta DAK} + S_{\Delta CKD} = \frac{1}{2} a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot b + \frac{1}{2} c^2 = ab + \frac{1}{2} c^2.$$

Отже, $\dfrac{(a+b)^2}{2} = ab + \dfrac{1}{2}c^2$; $(a + b)^2 = 2ab + c^2$; $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$; звідси $a^2 + b^2 = c^2$.

Доведення 3. В індійському доведенні використовувалося: «Дивися». А ми розглянемо з наукової точки зору. Для цього вам необхідно пригадати формули площі квадрата й прямокутного трикутника (рис. 5). Площа всіх чотирьох прямокутних трикутників: $4S_{\Delta} = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b = 2ab$.

Площа більшого квадрата: $S_{\square} = c^2$.

Площа меншого квадрата: $S_1 = (a - b)^2$. Тоді $c^2 - 2ab = (a - b)^2$; $c^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2$; $c^2 = a^2 + b^2$.

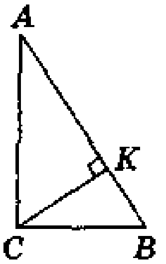


Рис. 3

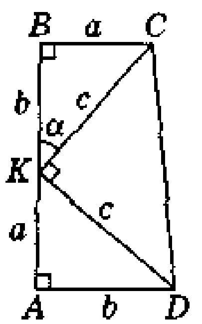


Рис. 4

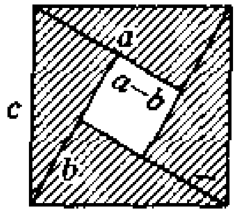


Рис. 5

Доведення 4. Розріжемо квадрат зі стороною ($a + b$) двома способами (рис. 6). В обох випадках вийшло чотири прямокутних трикутники з катетами a і b, тому площа квадрата 1 дорівнює сумі площ квадратів 2 і 3. Але квадрат 1 побудований на гіпотенузі прямокутного трикутника з катетами a і b, а квадрати 2 і 3 побудовані на його катетах. Отже, $c^2 = a^2 + b^2$.

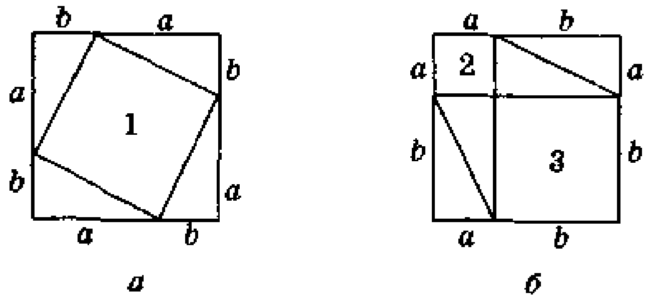


Рис. 6

VI. Первинне закріплення нових знань учнів

1. Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $c = 2b$, $a = 20$.
   Знайти: b.
   Відповідь: 15.
2. Дано: $a = 8$, $b = 8\sqrt{3}$.
   Знайти: c.
   Відповідь: 16.
3. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 3 м і 4 м.
   Знайдіть третю сторону.
   Відповідь: 5 м або $\sqrt{7}$ м.

Зауваження. Землеміри Давнього Єгипту для побудови прямого кута користувалися таким способом. Мотузку ділили вузлами на 12 рівних частин і кінці зв'язували. Потім мотузку розтягували на землі так, щоб утворився трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 поділок. Кут трикутника, протилежний стороні, яка має 5 поділок, був прямий ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Тому зазначений спосіб побудови кута трикутника зі сторонами 3, 4 і 5 іноді називають єгипетським.

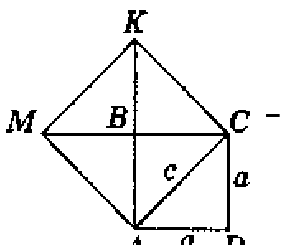
4. Дано: ΔACB, $\angle C = 90°$, $a = 12$ м, $b = 5$ м.
   Знайти: c.
   Відповідь: 13 м.

Зауваження. Трикутники зі сторонами, вираженими цілими числами, називають піфагоровими, наприклад трикутник зі сторонами 5, 12, 13.

VII. Підбиття підсумків уроку

Питання класу

1. Сформулюйте теорему Піфагора.
2. Який трикутник називається єгипетським?
3. Як знайти гіпотенузу, якщо відомі катети?
4. Як знайти катет, якщо відомі гіпотенуза і другий катет?
5. Як знайти діагональ прямокутника, якщо відомі його сторони?



6. Як знайти сторону ромба, якщо відомі його діагоналі?

VIII. Домашнє завдання

Д 1. Чотирикутники *ABCD* і *AMKC* — квадрати (рис. 7). Доведіть різними способами, що $S_{AMKC} = 2S_{ABCD}$.

С 2. У книзі «Початки Евкліда» (книга перша) теорему сформульовано так: «У прямокутних трикутниках квадрат на стороні, що стягує прямий кут, дорівнює разом узятим квадратам на сторонах, які утворюють прямий кут». Зобразіть у зошитах геометричну інтерпретацію цього. (Формулювання, надруковане на аркушах, роздаються учням.)

Д 3. Сторони прямокутника дорівнюють 60 см і 91 см. Чому дорівнює діагональ?

В 4. Діагональ квадрата дорівнює *a*. Чому дорівнює сторона квадрата?