УРОК № 46

Тема уроку. *Площі многокутників.*

Мета уроку: *поглибити знання учнів* з *даної теми; формувати вміння застосовувати отримані знання під час розв'язування задач, накопичувати методи й прийоми розв'язування задач.*

Тип уроку: *удосконалення знань, формування вмінь та навичок учнів.*

Хід уроку

I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання

Учні перевіряють правильність виконання домашнього завдання за ксерокопіями карток, виданими на кожну парту.

Задача 4. *Розв'язання*

Нехай $ABCD$ (рис. 1) — дана рівнобічна трапеція, $AB = CD = 10$ см, $AD = = 16$ см. Оскільки трапеція описана навколо кола, то $AB + CD = AD + BC$. Звідси $BC = 20 - 16 = 4$ (см). Проведемо висоту BM ($BK \perp AD$). Оскільки трапеція рівнобічна, то $AM = \frac{AD - BC}{2} = \frac{16-4}{2} = 6$ (см). Тоді із трикутника AMB ($\angle AMB = 90°$) за теоремою Піфагора: $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = 8$ (см). Як уже було доведено, висота трапеції, описаної навколо кола, дорівнює діаметру цього кола. Отже, радіус описаного кола дорівнює 4 см, площа $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} BM = \frac{16+4}{2} \cdot 8 = 10 \cdot 8 = 80$ (см^2). Щоб знайти площу трикутника ADK, розглянемо трикутники BCK і ADK. Вони подібні, оскільки $BC \parallel AD$. Нехай точки F і L — точки дотику вписаного кола і верхньої та нижньої основ трапеції. KF — висота трикутника BCK, KL — висота трикутника ADK. Нехай $KF = x$. Тоді $KL = x + 8$.

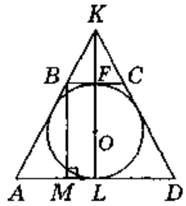

Рис. 1

З подібності одержуємо пропорцію: $\frac{BC}{AD} = \frac{KF}{KL}$; $\frac{4}{16} = \frac{x}{x+8}$; $\frac{1}{4} = \frac{x}{x+8}$; $x + 8 = 4x$; $3x = 8$; $x = 2\frac{2}{3}$. Отже, $KF = 2\frac{2}{3}$ см, тоді $KL = 10\frac{2}{3}$ (см).

Таким чином, $S_{\Delta AKD} = \frac{AD \cdot KL}{2} = \frac{16 \cdot 32}{3 \cdot 2} = 85\frac{1}{3}$ (см^2).

Відповідь: 80 см^2, 4 см, $85\frac{1}{3}$ см^2.

III. Формулювання мети і задач уроку

IV. Актуалізація опорних знань учнів

На кожну парту видається набір формул (рис. 2) і набір карток із зображеннями геометричних фігур (рис. 3). Протягом 3 – 5 хвилин учні повинні для кожної геометричної фігури знайти відповідну формулу для обчислення її площі.

$$S=\frac{a+b}{2}h \quad S=\frac{1}{2}d_1d_2 \quad S=a^2 \quad S=ab \quad S=ah_a$$

$$S=\frac{1}{2}ah_a \quad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad S=\frac{ab}{2} \quad S=\frac{d^2}{2}$$

Рис. 2

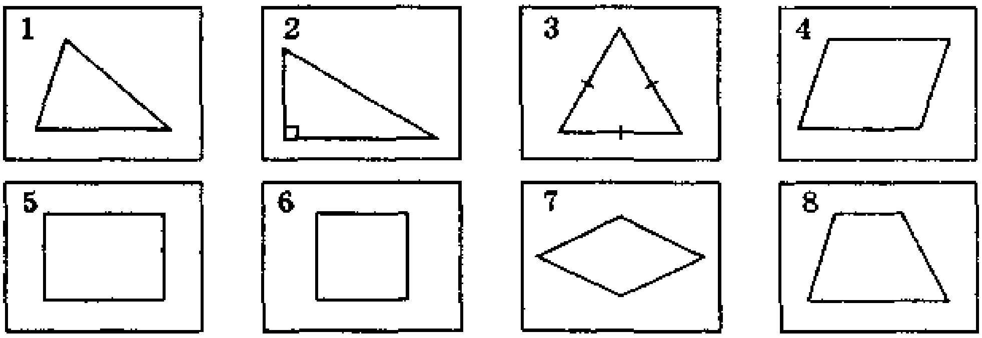

Рис. 3

V. Закріплення засвоєних навичок та вмінь учнів (диференційована робота)

Учні самостійно визначають рівень завдань, які вони розв'язуватимуть. Завдання середнього рівня виконуються у вигляді тестової самостійної роботи. Завдання високого та достатнього рівнів видаються на картках для індивідуальної роботи. Учні можуть працювати в парах або невеликих групах. Тести перевіряються в парі (взаємоперевірка). Індивідуальні завдання розглядаються біля дошки.

Самостійна робота

Варіант 1

Виберіть правильну відповідь.

1. Периметр квадрата дорівнює 36 см. Знайдіть його площу.
   а) 72 см^2; б) 81 см^2; в) 16 см^2.
2. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 6 см і 8 см.
   а) 48 см^2; б) 24 см^2; в) 96 см^2.
3. Більша сторона паралелограма дорівнює 5 см, а висоти — 2 см і 2,5 см. Обчисліть другу сторону паралелограма.
   а) 4 см; б) 8 см; в) 2 см.
4. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть його площу.
   а) $\sqrt{3}$ см^2; б) 9 $\sqrt{3}$ см^2; в) 4 $\sqrt{3}$ см^2.
5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 10 см. Знайдіть його площу.
   а) 90 см^2; б) 45 см^2; в) 30 см^2.
6. У трикутнику *AMB* (рис. 4) $\angle AMB = 90°$, $MB = 4$ см, $\angle B = 45°$. Знайдіть площу трикутника *AMB*.
   а) 4 см^2; б) 8 см^2; в) 16 см^2.

7. Площа прямокутника — 48 см^2, одна з його сторін дорівнює 6 см. Знайдіть периметр прямокутника.
   а) 30 см; б) 56 см; в) 28 см.
8. Площа трапеції дорівнює 48 дм^2, висота — 6 дм і одна з основ — 4 дм. Знайдіть другу основу трапеції.
   а) 6 дм; б) 8 дм; в) 12 дм.

Варіант 2

1. Площа квадрата дорівнює 100 см^2. Знайдіть його периметр.
   а) 30 см; б) 50 см; в) 40 см.
2. Площа ромба дорівнює 24 см^2, а одна з його діагоналей 6 см. Знайдіть другу діагональ ромба.
   а) 8 см; б) 4 см; в) 12 см.
3. Сторони паралелограма дорівнюють 40 см і 50 см, а висота, проведена до меншої сторони, дорівнює 10 см. Знайдіть другу висоту паралелограма.
   а) 4 см; б) 6 см; в) 8 см.
4. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть його площу.
   а) $16\sqrt{3}$ см^2; б) $4\sqrt{3}$ см^2; в) 15 см^2.
5. Площа прямокутного трикутника дорівнює 48 см^2, а один з катетів — 6 см. Знайдіть другий катет трикутника.
   а) 16 см; б) 8 см; в) 12 см.
6. У трикутнику ABC (рис. 5) AB = 6 см, AC = 9 см, $\angle A = 30°$. Знайдіть площу трикутника ABC.
   а) 27 см^2; б) 13,5 см^2; в) 54 см^2.
7. Периметр прямокутника дорівнює ЗО см, а одна зі сторін — 9 см. Знайдіть площу прямокутника.
   а) 48 см^2; б) 54 см^2; в) 64 см^2.
8. Обчисліть висоту трапеції, площа якої дорівнює 90 см^2, а сума основ 30 см.
   а) 12 см; б) 6 см; в) 3 см.

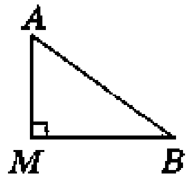

Рис. 4

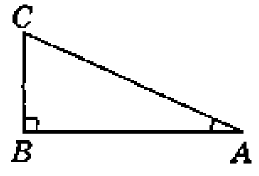

Рис. 5

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1: **1.** б; **2.** б; **3.** а; **4.** а; **5.** б; **6.** в; **7.** в; **8.** в.

Варіант 2: **1.** в; **2.** а; **3.** в; **4.** б; **5.** а; **6.** а; **7.** б; **8.** в.

Картка № 1
Бісектриси кутів A і D прямокутника $ABCD$ ділять його сторону BC на три частини по 12 см. Знайдіть площу прямокутника.

Розв'язання

Випадок 1. Нехай бісектриси кутів А і D перетинаються в точці M і перетинають сторону BC прямокутника в точках F і E відповідно (рис. 6), $BE = EF = FC = 12$ см за умовою. Отже, $BC = 3 \cdot BE = 36$ см. Трикутник ABF — прямокутний ($\angle B = 90°$), $\angle BAF = \frac{1}{2} \angle A = 90° : 2 = 45°$. Отже, трикутник ABF — рівнобедрений з основою AF. $AB = BE = 2 \cdot BE = 24$ см.

Тоді $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 24 \cdot 36 = 864$ (см^2).

Випадок 2. У цьому випадку (рис. 7) $BC = 36$ см, $AB = BK = 12$ см. Тоді $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 12 \cdot 36 = 432$ (см^2).

Відповідь: 864 см^2 або 432 см^2.

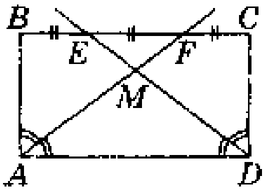

Рис. 6

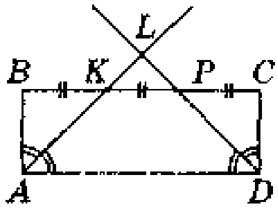

Рис. 7

Картка № 2

Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба, ділить сторону на відрізки завдовжки 7 см і 8 см, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть площу ромба. (*Відповідь*: $240\sqrt{2}$ см^2.)

Картка № 3

Діагоналі чотирикутника перпендикулярні (рис. 8). Доведіть, що його площа дорівнює півдобутку діагоналей.

Доведення

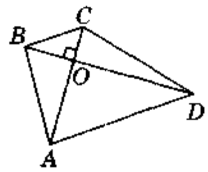

Рис. 8

$$S_{ABCD} = S_{\Delta BCD} + S_{\Delta BAD} = \frac{1}{2} CO \cdot BD + \frac{1}{2} AO \cdot BD =$$
$$= \frac{1}{2} BD \cdot (CO + AO) = \frac{1}{2} BD \cdot CA.$$

Отже, $S = \frac{d_1 d_2}{2}$, якщо $d_1 \perp d_2$ (d_1 і d_2 —діагоналі чотирикутника).

Картка № 4

На сторонах рівностороннього трикутника поза ним побудовані квадрати (рис. 9). Вершини квадратів послідовно сполучені. Знайдіть площу отриманого шестикутника, якщо сторона трикутника дорівнює 2 см.

Розв'язання

Площа шестикутника — це сума площ рівностороннього трикутника, трьох однакових квадратів і трьох рівнобедрених рівних між собою трикутників.

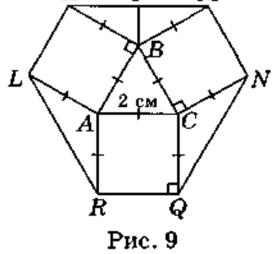

Рис. 9

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$; $S_{ABKL} = AB^2 = 4$. Трикутник *KBM* — рівнобедрений, оскільки *KB* = *BM* = 2 см (сторони рівних квадратів). Проведемо висоту *BF* ($BF \perp KM$), $\angle K = = \angle M = 30°$ (оскільки $\angle KBM = 120°$). Тоді із трикутника *MBF* ($\angle F = 90°$) $BF = \frac{1}{2} BM = 1$ (см), $FM = \sqrt{BM^2 - BF^2} = = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ (см).

$S_{\Delta KMB} = \frac{KM \cdot BF}{2} = \frac{1 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см²). Тоді $S_{LKMNQR} = \sqrt{3} + 12 + 3\sqrt{3} =$
$= (4\sqrt{3} + 12)$ (см²).

Відповідь: $(4\sqrt{3} + 12)$ см².

Картка № 5

Виразіть площу рівностороннього трикутника через його висоту *h*.

Розв'язання

Як було доведено на попередніх уроках, висоту *h* рівностороннього трикутника можна виразити через його сторону *a*: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тоді $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$. Оскільки площа S рівностороннього трикутника обчислюється за формулою: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то $S = \frac{\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4h^2\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$. Отже, $S = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$.

Картка № 6

Виразіть площу шестикутника, який має всі рівні кути й всі сторони, через радіус вписаного в нього кола.

Розв'язання

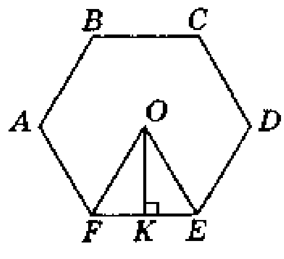

Рис. 10

Нехай *ABCDEF* — даний шестикутник (рис. 10), точка *O* — центр вписаного в нього кола, $OK \perp FE$, *OK* — радіус вписаного кола. Площа шестикутника дорівнює сумі площ шести рівних рівносторонніх трикутників. Площа одного з них $S = \frac{OK^2}{\sqrt{3}} = \frac{r^2}{\sqrt{3}}$ (*OK* = *r*). Отже, площа даного шестикутника $S = \frac{6r^2}{\sqrt{3}}$ або $S = 2\sqrt{3}r^2$.

VI. Підбиття підсумків уроку

Питання класу

1. Які теоретичні факти було використано під час розв'язування задач?

2. Що нового ви дізналися на уроці?
3. На які моменти слід звернути увагу під час виконання домашнього завдання?

VII. Домашнє завдання

1. Повторіть теоретичний матеріал за такими питаннями:
   1) Що таке многокутник; опуклий многокутник?
   2) Що таке плоский многокутник?
   3) Що називається кутом опуклого многокутника при даній вершині?
   4) Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?
   5) Що таке зовнішній кут опуклого многокутника?
   6) Чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого многокутника, узятих по одному при кожній вершині?
   7) Який многокутник називається вписаним у коло? описаним навколо кола?
   8) Яка геометрична фігура називається простою?
   9) Сформулюйте властивості площі для простих фігур.
   10) Чому дорівнює площа прямокутника? квадрата? паралелограма? трикутника?
   11) Як можна знайти площу прямокутного трикутника?
   12) За якою формулою можна обчислити площу рівностороннього трикутника?
   13) Чому дорівнює площа трапеції?
   14) Як можна обчислити площу чотирикутника, діагоналі якого є взаємно перпендикулярними?
2. Розв'яжіть задачі.

С 1) Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою c.

Д 2) Площа ромба дорівнює 600 см^2, а одна з діагоналей — 30 см. Знайдіть висоту ромба.

В 3) Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 6 см, а менша основа — 12 см. Знайдіть площу трапеції, якщо менша діагональ є бісектрисою прямого кута.

В 4) Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних прямокутників.

3. Підготуйте історичну довідку про вимір площ у стародавності.