Уроки 37—38

Тема. ***Коло і круг.***

Мета. Повторити поняття *коло, круг* і *їх елементи,* ввести поняття дотичної до кола і розглянути її властивості.

Вимоги до підготовки учнів. У результаті вивчення теми учні повинні вміти: зображати коло, його елементи, дотичну до кола, формулювати означення кола, круга, їх елементів, описувати взаємне розташування кола і прямої, доводити властивість дотичної до кола і використовувати її до розв'язування задач.

Методичні вказівки

Коло — одна з найважливіших геометричних фігур. З нею учні ознайомлюються ще у початкових класах, а докладніше вивчають у 6 і 7 класах. Крім відомостей з підручника, учням можна розповісти і таке.

— Колись українці не розрізняли слова *коло* і *круг.* Наприклад, співали: *"Ой зійди, зійди, ясен місяцю, як млиновеє коло..."*

Співали про коло, хоча повний місяць і млиновий камінь мають форму не кола, а круга. В багатьох мовах і тепер круг і коло називають одним словом. Подібно до того, як ми, наприклад, трикутником називаємо і замкнену ламану з трьох ланок, і частину площини, обмежену такою ламаною. В українській мові для двох розглядуваних понять існують різні назви.

Проте у сучасній українській мові слово *коло* використовується в двох розуміннях. Згадаємо ще одну пісню: *"Коло млина, коло броду два голуби пили воду..."*

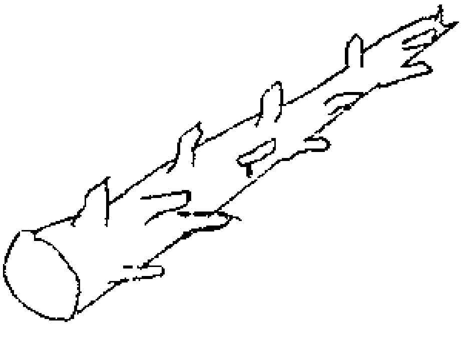
Коло — іменник (математичне поняття)
Коло — прийменник (як і *біля*)

...о самого кореня слова *навколо, довкола. Колом* наші далекі предки ... бога Сонця. Зд... ...*лядка* та ін.

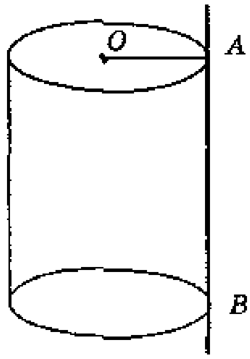
У російській науковій ... азивали: *циркуль, обруч, округлость, окружие, колесо; коло — округ, кружение, окружие, циркумференция, периферия, периметр.* В "Арифметиці" Магницького читаємо: *"Чрез кентр колесе линию проведи яже нарицается мередиана"* (Через центр кола відрізок проведи, який називається діаметром). В інших давніх книжках сучасне поняття *радіус* називалося словами: *полу поперечник, полудіаметр, семидіаметр* та ін.

Звідки походить слово *коло?* Воно суто українське. Російські мовознавці спеціально досліджували його походження і дійшли такого висновку: "Колесо (в значений круг) — передача средствами русского языка украинского научного термина *коло.* Этот украинизм имел широкое хождение в средневековой научной литературе, в рукописях южных и юго-западных и преемственно использован Магницким и Поликарповым, выучениками Славяно-греко-латинской академии, где были очень сильны элементы южнорусской образованности" (Л. Л. Кутина. Формирование языка русской науки. — М.; Л.: Наука, 1964. — С. 47).

Цікава версія про зв'язок слова *коло* з далекими предками українців. Як писав давньогрецький історик Геродот, в його часи на землях сучасної України жили люди, яких греки називали скіфами-орачами, а самі себе вони називали *сколотами.* Орачами їх стали називати пізніше, коли вони вже мали рало і поля орали (оралювали). Раніше, готуючи поля до сівби, сколоти *колодили* їх, тобто тягали колоди дерева із залишками обрубаних гілок (мал. 62). Згодом те *осолодити* перетворилося на *скородити.* Коли колоду розколювали на частини, отримували кілки. Якщо тварину прив'язували до забитого в землю кілка (кола), вона ходила *довкола, навколо.*



Мал. 62



Мал. 63

Щоб учні краще зрозуміли означення кола, корисно наводити контрприклади.

— Зміст поняття *коло* ми розкриваємо за допомогою такого означення. "Колом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки". Чи не можна з цього означення вилучити слово "всіх"? Ні, бо тоді б йому задовольняла будь-яка частина кола, а частина кола не є колом. Чи не можна з означення кола вилучити слово "площини"? Ні. Бо такому означенню задовольняла б поверхня кулі, а не коло.

Останнє запитання (чи слід в означенні кола згадувати площину?) заслуговує більшої уваги. Оскільки ще на початку вивчення геометрії ми домовляємося розглядати в планіметрії фігури тільки однієї площини, то при вивченні планіметричних тем кожного разу про це можна не згадувати. Проте, формулюючи важливі означення і теореми, з дидактичних міркувань на цьому бажано хоч іноді наголошувати. Традиційно вчителі математики так роблять, коли формулюють означення кола чи паралельних прямих. Але щоб бути послідовними, бажано так само ставитися і до інших означень і теорем.

Чи правильне таке означення: "Пряма, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається дотичною"? Розглянемо пряму *а,* якій належить твірна циліндра (мал. 63). Вона перпендикулярна до радіуса *О А* кола основи цього циліндра, отже, згідно з наведеним означенням, пряма *а* дотична до кола основи циліндра. Насправді це не так, сформульоване означення правильне тільки для планіметрії.

Аналогічною є ситуація з дотичними колами. "Говорять, що два кола, які мають спільну точку, *дотикаються* в цій точці, якщо вони мають в ній спільну дотичну". Уявімо кола, вписані в дві сусідні грані куба. Пряма, якій належить спільне ребро цих граней, дотична до кожного з розглядуваних кіл і проходить через їх спільну точку. А такі кола не вважають дотичними. Бо коли б хто-небудь називав їх дотичними, то мав би істотно змінити формулювання багатьох теорем, крім внутрішнього і зовнішнього дотику двох кіл, розглядати й інші.

Робота з матеріалом підручника

На першому уроці

Для роботи в класі: § 17; № 497 – 501; 502 – 504, 506, 508 , 509, 511, 523.

Для роботи вдома: § 17; ЗДС 1 – 7; № 505, 507, 510, 522.

На другому уроці

Для роботи в класі: § 17; № 497 – 501; 512 – 514, 516, 518, 520, 521, 525.

Для роботи вдома: § 17; ЗДС 1 – 7; № 515, 517, 519, 524.

Вказівки до розв'язування задач

503. Нехай AB — довільна хорда, що не проходить через центр О кола радіуса r. За нерівністю трикутника $AB < r + r$, тобто $2r > AB$.

504. З довільної точки A даного кола, як із центра, проводимо дугу радіусом, що дорівнює даному відрізку. Якщо ця дуга перетне дане коло в точках K і P, то хорди AK і AP — ті, які треба було побудувати. Таких хорд у даному колі можна побудувати безліч.

507. $\Delta ABO = \Delta CDO$ за трьома сторонами.

509. $AO = OO_1 = O_1A$, тому $\angle OAO_1 = 60°$, $\angle AOB = 60° \cdot 2 = 120°$.

511. Якщо AB і CD — рівні хорди кола з центром O, а OH і OP — перпендикуляри, опущені на ці хорди, то рівнобедрені трикутники AOB і COD рівні за трьома сторонами, а прямокутні трикутники AOH і COP рівні за гіпотенузою і прилеглим кутом. Тому $OH = OP$.

512. а) Якщо дане коло з центром O і пряма a, то можна через O провести пряму c, перпендикулярну до a. Через точки K і P перетину прямої c з даним колом слід провести прямі, перпендикулярні до c. Задача має два розв'язки.

б) Пряму с слід провести паралельно прямій a, все інше — як у попередній задачі. Задача також має два розв'язки.

513. Якщо мотузка намотуватиметься на кілочок, відстань до нього зменшуватиметься і палиця садівника креслитиме не коло, а спіраль.

514. Якщо кола дотикаються зовнішнім способом, то шукані радіуси дорівнюють:

16 : (1 + 3) = 4 (см), 4 · 3 = 12 (см).

Якщо кола дотикаються внутрішнім способом, то

16 : (3 – 1) = 8 (см), 8 · 3 = 24 (см).

515. Якщо дотичні дотикаються до кола в точках B і С, то $\Delta AOB = \Delta AOC$ (за трьома сторонами), отже, $\angle OAB = \angle OAC$.

516. Якщо B і C — точки дотику, то прямокутні трикутники OAB і OAC рівні. OB — катет, що лежить проти кута 30°. OB = 0,5 OA = 5 см.

517. Нехай B і C — точки дотику. Тоді $ABOC$ — квадрат, $\angle BAC = 90°$.

519. Трикутник ABC рівносторонній, тому $\angle A = 60°$.

519. Нехай радіус кола дорівнює r (мал. 64). Тоді:

1) $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = 2r$.

2) Трикутник $O_1O_2O_3$ рівносторонній, тому кожний його кут має 60°.

За першою ознакою $\Delta O_1PT = \Delta O_2TK = \Delta O_3PK$, тому $PT = TK = KT$.

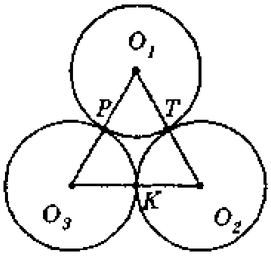
520. Оскільки дуги рівні, то й кути між кожними двома променями рівні.

360° : 3 = 120°. Якщо радіус кола r, то $2\pi r = 9$, $r = 9 : 2\pi \approx 1{,}43$ (см).

521. Площа S кільця дорівнює різниці площ кругів радіусів r і r_1:

$S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi(r + r_1)(r - r_1) = \pi\, m(r + r_1)$.

Оскільки $\pi(r + r_1) = 2\pi OM = l$, звідки $S = lm$.

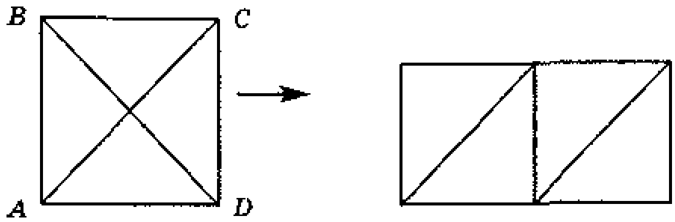


Мал. 64

523. Якщо довжина розглядуваної бісектриси дорівнює l , то $20 + 30 = 40 + 2l$, звідки $l = 5$ (см).

525. Розрізавши даний квадрат на 4 рівні трикутники, з них можна скласти прямокутник зі сторонами 5 см і 10 см (мал. 65). Отже, шукана площа

$S = 5 \cdot 10 = 50$ (см^2).



Мал. 65