УРОК № 7

Тема уроку. *Прямокутник. Його властивості та ознаки.*

Мета уроку: *формувати вміння учнів розв'язувати задачі різного рівня складності, застосовуючи означення, властивості та ознаки прямокутника.*

Тип уроку: *формування вмінь і навичок учнів.*

Хід уроку

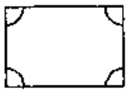
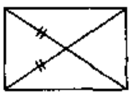
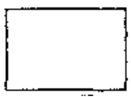
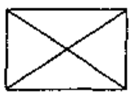
I. Організаційний момент

II. Перевірка домашнього завдання

Один із учнів виконує на дошці рисунки до складеної таблиці й усно коментує їх (орієнтовно — таблиця 3).

Таблиця 3

Прямокутник. Його ознаки та властивості

	Означення прямокутника	
		Прямокутник — це паралелограм, у якого всі кути прямі
	Ознаки прямокутника	
1.		Якщо в паралелограмі всі кути рівні, то цей паралелограм — прямокутник
2.		Якщо в паралелограмі один кут прямий, то цей паралелограм — прямокутник
3.		Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то цей паралелограм — прямокутник
4.		Якщо в чотирикутнику три кути прямі, то цей чотирикутник — прямокутник
	Властивості прямокутника	
1.		Усі властивості паралелограма
2.		Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то цей паралелограм — прямокутник

Учні за готовими розв'язаннями, записаними заздалегідь на дошці, перевіряють правильність виконання домашніх задач, виправляють помилки, за необхідністю ставлячи питання щодо їх розв'язання.

Задача 1. *Розв'язання*

Нехай $ABCD$ (рис. 1) — паралелограм, $\angle OBC = \angle OCB$. Оскільки за умовою $\angle OBC = \angle OCB$, то трикутник OBC — рівнобедрений з основою BC, тоді $OB = OC$. Але $ABCD$ — паралелограм, отже, $OB = OD$, $OC = OA$, тому $BD = AC$. Таким чином, паралелограм $ABCD$ — прямокутник за ознакою.

Задача 2. *Розв’язання*

Нехай $ABCD$ (рис. 2) — прямокутник, AK— бісектриса кута BAD, $BK = KC$,

AB = 10 см. Оскільки $ABCD$ — прямокутник, то $\angle A = 90°$. Оскільки AK — бісектриса кута A, то, $\angle BAK = \angle KAD = 45°$. Тоді $\angle BKA = 90° - 45° = 45°$, отже, трикутник ABK — рівнобедрений з основою AK і $AB = BK = 10$ см. Таким чином, $BC = 20$ см, тому що за умовою $BK = KC$. $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2 \cdot (10 + + 20) = 60$ см.

Відповідь: 60 см.

Задача 3. *Розв'язання*

Нехай $ABCD$ (рис. 3) — прямокутник, BD і AC — його діагоналі, AK — бісектриса кута A, $\angle AOD = 105°$. Оскільки AK — бісектриса кута BAD, то $\angle BAK = \angle DAK = 45°$. Тоді $\angle ODA = 180° - 105° - 45° = 30°$ (сума кутів трикутника AOD дорівнює 180°). Оскільки $ABCD$ — прямокутник, то $AN = ND$, отже, трикутник AND — рівнобедрений і $\angle NAD = \angle NDA = 30°$. Таким чином, $\angle AND = 180° - 60° = 120°$.

Відповідь: 120°.

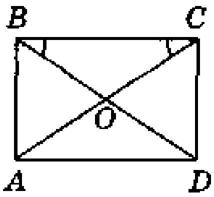


Рис. 1

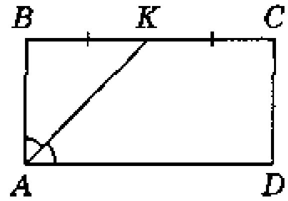


Рис. 2

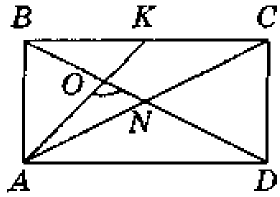


Рис. 3

Фронтальне опитування учнів з теорії

Питання класу

1. Дайте означення прямокутника.
2. Сформулюйте властивості прямокутника.
3. Сформулюйте ознаки прямокутника.
4. Яку властивість має медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи?
5. Де знаходиться центр кола, описаного навколо-прямокутного трикутника?

III. Актуалізація опорних знань учнів

Учитель пропонує усно розв'язати задачі за рисунками, заздалегідь підготовленими на дошці або плакаті.

Задача 1. Дано: $ABCD$ — прямокутник, $\angle 1 = 120°$ (рис. 4). Знайти: $\angle 2$. (Відповідь: 60°.)

Задача 2. Дано: $ABCD$ — прямокутник, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 5). Довести: ВК = МС.

Задача 3. Дано: $ABCD$ — прямокутник, $BK = CH$, $AM = MD$ (рис. 6). Довести: $KM = HM$.

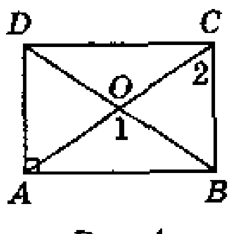


Рис. 4

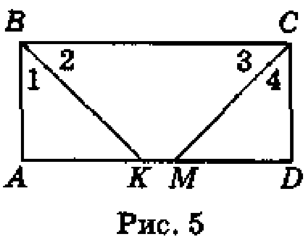


Рис. 5

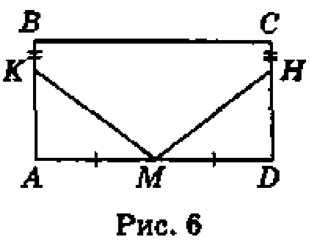


Рис. 6

IV. Закріплення засвоєних умінь і навичок учнів

Розв'язання задач

Задача 1. У прямокутнику бісектриса кута ділить протилежну сторону на відрізки 17 см і 8 см починаючи від найближчої до цього кута вершини. Знайдіть периметр прямокутника.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ (рис. 7) — даний прямокутник, BM — бісектриса кута B, AM = 17 см, DM = 8 см. Тоді $\angle ABM = \angle CBM = 45°$ (BM — бісектриса). Отже, у прямокутному трикутнику ABM ($\angle A = 90°$) $\angle BMA = 90° - 45° = 45°$. Тобто трикутник ABM — рівнобедрений, $AB = AM = 17$ см. За властивістю протилежних сторін прямокутника $CD = AB = 17$ см. $DM = 8$ см (за умовою), отже, $AD = AM + MD = 17 + 8 = 25$ (см). $BC = AD = 25$ см.

Таким чином, $P_{ABCD} = (AB + BC) \cdot 2 = (17 + 25) \cdot 2 = 42 \cdot 2 = 84$ (см).

Відповідь: 84 см.

Задача 2. У прямокутнику діагональ ділить кут у відношенні 1:2, менша сторона прямокутника дорівнює 2,7 см. Знайдіть довжини діагоналей прямокутника.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ (рис. 8) — даний прямокутник, BD — його діагональ, $AB < BC$, AB = 2,7 см. Нехай $\angle CBD = x$ ($x > 0$), тоді $\angle ABD = 2x$. Оскільки $\angle ABC = 90°$, маємо: $x + 2x = 90°$, $3x = 90°$, $x = 30°$. Отже, $\angle ABD = 60°$, $\angle CBD = = 30°$. $\angle BDA = \angle BDC = 30°$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD і січній BD. Таким чином, у трикутнику ABD ($\angle A = 90°$) катет AB, що лежить проти кутав 30°, дорівнює половині гіпотенузи: $AB = \frac{1}{2} BD$. Отже, $BD = 2AB = 2 \cdot 2{,}7 = 5{,}4$ (см). Діагоналі прямокутника рівні, тобто $AC = = BD = 5{,}4$ см.

Відповідь: 5,4 см; 5,4 см.

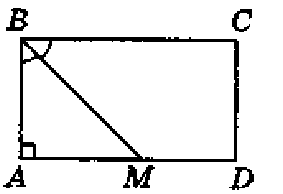


Рис. 7

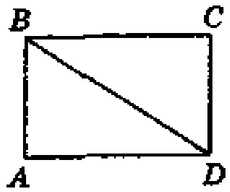


Рис. 8

Задача 3. У прямокутний трикутник, кожний катет якого дорівнює 6 см, вписаний прямокутник, який має із трикутником спільний кут. Знайдіть периметр прямокутника.

Розв'язання

Нехай ABC (рис. 9) — даний прямокутний трикутник, у якому $\angle C = 90°$, $AC = CB = 6$ см, $CKLM$ — прямокутник. У трикутнику ABC $\angle A = \angle B = 45°$, оскільки цей трикутник рівнобедрений. Отже, у трикутнику AKL, де $\angle AKL = = 90°$ (оскільки $CKLM$ — прямокутник), теж $\angle ALK = \angle KAL = 45°$. Таким чином, трикутник AKL — рівнобедрений, $AK = KL$. Аналогічно в трикутнику

LMB, де $\angle LMB = 90°$, $\angle MLB = \angle B = 45°$ і $LM = MB$.Отже, $CA = CK + KA = CK + KL = 6$ (см). Звідси $P_{CKLM} = 2 \cdot (CK + KL) = 12$ см.

Відповідь: 12 см.

Задача 4. У прямокутнику точка перетину діагоналей знаходиться від меншої сторони на 4 см далі, ніж від більшої. Периметр прямокутника дорівнює 56 см. Знайдіть сторони прямокутника.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ (рис. 10) — даний прямокутник, точка O — точка перетину його діагоналей. Проведемо відрізки OM, перпендикулярний до сторони BC, і ON, перпендикулярний до сторони AB. Оскільки $BC > AB$, то ON на 4 см більше від OM за умовою. У трикутнику BOC $BO = OC$ як половини рівних діагоналей AC і BD. Отже, у трикутнику BOC висота OM є й медіаною (властивість висоти рівнобедреного трикутника, проведеної до основи). Тобто $BM = \frac{1}{2} BC$. Аналогічно в трикутнику BOA ($BO = OA$) точка N — середина AB, $BN = \frac{1}{2}$ AB . Оскільки за умовою $P_{ABCD} = 56$ см, то $AB + BC = 28$ (см), а $BN + BM = 28 : 2 = 14$ (см). Розглянемо чотирикутник $BMON$: у ньому три прямі кути, отже, $BMON$ — прямокутник за ознакою. $OM = BN = x$ см, тоді $MB = ON = (x + 4)$ см. ($x > 0$) Отже, $x + x + 4 = 14$, $2x = 10$, $x = 5$. Таким чином, $BN = 5$ см, тоді $AB = CD = 10$ см, а $BM = 5 + 4 = 9$ (см), $BC = AD = 18$ см.

Відповідь: 10 см, 10 см, 18 см, 18 см.

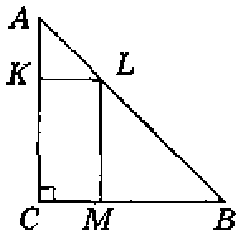


Рис. 9

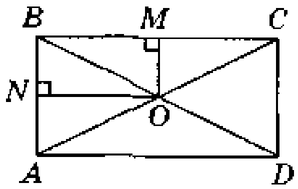


Рис. 10

Задача 5. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC дорівнює 8 см. Через середину гіпотенузи — точку K проведено прямі, що паралельні катетам трикутника і перетинають їх у точках D і E. Знайдіть довжину відрізка DE.

Розв'язання

У трикутнику ABC $\angle C = 90°$ (рис. 11), оскільки AB за умовою гіпотенуза. У чотирикутнику $CEKD$ за побудовою три кути прямі. Отже, $CEKD$ — прямокутник за ознакою. Тоді діагоналі DE і CK цього прямокутника рівні. Оскільки CK — медіана прямокутного трикутника ABC (K — середина AB), то $CK = \frac{1}{2} AB = 4$ см. Таким чином, $DE = 4$ см.

Відповідь: 4 см.

Задача 6. У прямокутнику $ABCD$ (рис. 12) точка O — точка перетину його діагоналей, $P_{ABD} - P_{AOD} = 4$ см. Знайдіть сторону AB.

Розв'язання

$P_{\Delta ABD} = AB + BD + AD$. $P_{\Delta AOD} = AO + OD + AD$. $AO = BO = OD$ як половини діагоналей прямокутника.

$$P_{\triangle ABD} - P_{\triangle AOD} = AB + \cancel{BD} + \cancel{AD} - \cancel{AO} - \cancel{OD} - \cancel{AD} = AB = 4$$

(оскільки *BD* = = *BO* + *OD* = *AO* + *OD*).

Відповідь: 4 см.

Задача 7. У прямокутнику *ABCD* (рис. 13) точка *O* — точка перетину діагоналей, $\angle ABD = 57°$. Знайдіть кут *COD* і доведіть, що $\angle ABD + \angle BCA =$ $= 90°$.

Розв'язання

Оскільки *BO* = *AO* як половини рівних діагоналей прямокутника *ABCD*, то трикутник *AOB* — рівнобедрений. Отже, $\angle BAO = \angle ABO = 57°$ як кути при основі рівнобедреного трикутника. Тоді $\angle AOB = 180° - 2 \cdot 57° = 180° - 114° =$ $= 66°$. $\angle COD = \angle AOB = 66°$ як вертикальні.

Оскільки $\angle ABC = 90°$ (*ABCD* — прямокутник), то $\angle CBD = 90° - 57° = 33°$. Трикутник *BOC* — рівнобедрений з основою *BC*, отже, $\angle BCA = \angle CBD = 33°$. Таким чином, $\angle ABD + \angle BCA = 90°$, що й треба було довести.

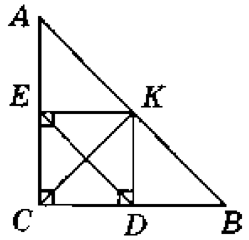


Рис. 11

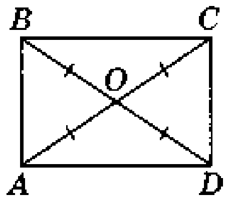


Рис. 12

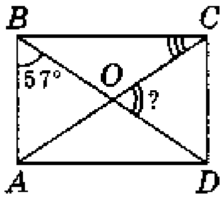


Рис. 13

V. Підбиття підсумків уроку

Учитель ще раз підкреслює необхідність знання всіх ознак і властивостей прямокутника та паралелограма для розв'язання задач з геометрії.

VI. Домашнє завдання

С **1.** У прямокутнику *ABCD* точка *O* — точка перетину діагоналей, $\angle AOD =$ $= 70°$. Знайдіть кут *OCD*.

Д **2.** Знайдіть кут між меншою стороною та діагоналлю прямокутника, якщо він на 30° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

В **3.** Перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника до діагоналі, ділить її у відношенні 3:1. Знайдіть довжину діагоналей прямокутника, якщо точка перетину діагоналей віддалена від більшої сторони на 6 см.