УРОК № 38

Тема уроку. *Об'єм зрізаної піраміди. Об'єми подібних тіл.*
Мета уроку: *виведення формули для об'єму зрізаної піраміди; відношення об'ємів подібних тіл; формування умінь знаходити об'єми зрізаних пірамід.*
Обладнання: *моделі зрізаних пірамід.*

I. Перевірка домашнього завдання

1. Перевірити правильність виконання домашнього завдання можна за записами розв'язання задач № 33 (2), 35, 38, зробленими на дошці до початку уроку.

Розв'язання задачі № 33(2)

Нехай *SABCD* — правильна піраміда (рис. 157); AB = *a*, *SA* = *b*; *SO* ⊥ *(ABC).*

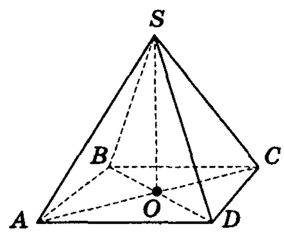


Рис. 157

$V = \frac{1}{3} S_{осн} H = \frac{1}{3} AB^2 H = \frac{1}{3} a^2 H$. Із ΔSAO

$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

Тоді $V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{1}{3} a^2 \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{\frac{4b^2 - 2a^2}{4}} = \frac{1}{6} a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}$.

Відповідь. $\frac{1}{6} a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}$.

Розв'язання задачі № 35

I спосіб

Нехай *SABC* — дана піраміда (рис. 158); *<ASB* = *<BSC* = *<CSA* = 90°; SA = *SB* = *SC* = *b.*

SABC — правильна піраміда, оскільки AB = *BC* = *AC* = $b\sqrt{2}$, тобто в основі піраміди лежить правильний трикутник *ABC* і вершина S проектується в точку O — центр трикутника *ABC.*

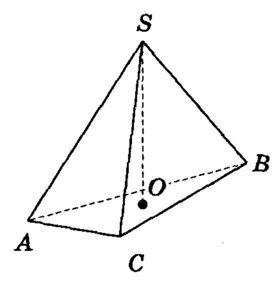


Рис. 158

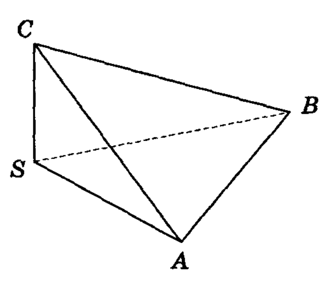
Із ΔS0B $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{AB}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{2b^2}{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Отже, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(b\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b^3}{6}$.

Відповідь. $\frac{b^3}{6}$.

II спосіб

Перевернемо піраміду SABC (рис. 158), прийнявши за основу грань *SAB* (рис. 159), тоді маємо:



$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\ SB \cdot SA \cdot SC = \frac{b^3}{6}$.

Відповідь. $\frac{b^3}{6}$.

Розв'язання задачі № 38

$SABCDS_1$ — правильний октаедр, SA = a.

$V_{SABCDS1} = 2 \cdot V_{SABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3}\ S_{осн} H = 2 \cdot \frac{1}{3} a^3 H$ (рис. 160).

Із ΔSAO

$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$V_{SABCDS1} = 2 \cdot \frac{1}{3} a^3 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

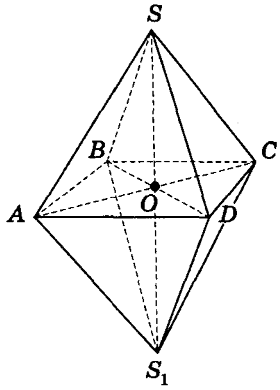


Рис. 160

Відповідь. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

2. Самостійна робота.

Варіант 1

1) Основа піраміди — ромб зі стороною a і кутом α, висота піраміди дорівнює h. Знайдіть об'єм піраміди. *(5 балів)*
2) Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2 см, плоский кут при вершині дорівнює 60°. Знайдіть об'єм піраміди. *(7 балів)*

Варіант 2

1) Знайдіть об'єм піраміди, висота якої дорівнює h, а основа — прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. *(5 балів)*
2) Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 3 см, бічне ребро утворює з основою кут 45°. Знайдіть об'єм піраміди. *(7 балів)*

Варіант 3

1) Основа піраміди — прямокутник, діагональ якого дорівнює d і утворює зі стороною кут φ. Висота піраміди дорівнює h. Знайдіть об'єм піраміди. *(5 балів)*
2) Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, бічна грань утворює з основою кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди. *(7 балів)*

Варіант 4

1) Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині, а його висота, проведена до основи, дорівнює h. Висота піраміди дорівнює Н. Знайдіть об'єм піраміди. *(5 балів)*
2) Висота основи правильної трикутної піраміди дорівнює 2 см, бічне ребро утворює з висотою піраміди кут 30°. Знайдіть об'єм піраміди. *(7 балів)*

Відповідь. Варіант 1. 1) $\frac{1}{3} a^2 h \sin \alpha$; 2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см^3.

Варіант 2.1) $\frac{1}{12}c^2h\sin 2\alpha$; 2) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ см^3.

Варіант 3. 1) $\frac{1}{6}d^2 h\sin 2\varphi$, 2) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ см^3.

Варіант 4. 1) $\frac{1}{3}h^2H\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$; 2) $1\frac{7}{9}$ см^3.

ІІ. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Об'єм зрізаної піраміди

Теорема

Об'єм зрізаної піраміди, площі основ і висота якої дорівнюють відповідно S, S_1 і h, можна знаходити за формулою

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{S\cdot S_1} + S_1\right)$$

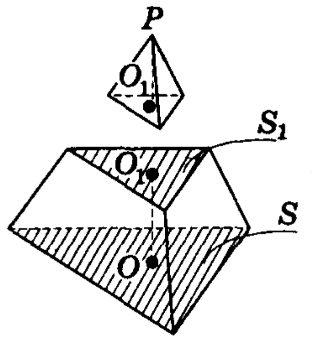


Рис. 161

Доведення

Зрізану піраміду можна одержати із повної піраміди шляхом відтинання від неї меншої піраміди, і, отже, об'єм зрізаної піраміди дорівнює різниці об'ємів всієї піраміди і піраміди, яку відрізали (рис. 161).

Площі S і S_1 їх основ відносяться, як квадрати відстаней від відповідних площин до вершини Р. Якщо $PO_1 = x$, то

$\frac{S}{S_1} = \frac{(x+h)^2}{x^2}$; $Sx^2 = S_1(x+h)^2$; $\sqrt{S}\cdot x = \sqrt{S_1}(x+h)$; $\sqrt{S}\cdot x - \sqrt{S_1}x = \sqrt{S_1}h$;

$x\cdot(\sqrt{S} - \sqrt{S_1}) = \sqrt{S_1}h$; $x = \frac{\sqrt{S_1}h}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$.

Отже, об'єм V зрізаної піраміди $V = \frac{1}{3}(x+h)S - \frac{1}{3}xS_1 = \frac{1}{3}xS + \frac{1}{3}hS - \frac{1}{3}xS_1$

$= = \frac{1}{3}hS + \frac{1}{3}x(S - S_1) = \frac{1}{3}hS + \frac{1}{3}\,x = \frac{\sqrt{S_1}h}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}(S - S_1) = \frac{1}{3}hS + \frac{1}{3}\sqrt{S_1}h\cdot(\sqrt{S} + \sqrt{S_1}) = = \frac{1}{3}hS + \frac{1}{3}h\sqrt{S\cdot S_1} + \frac{1}{3}hS_1 = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{S\cdot S_1} + S_1)$.

Розв'язування задач

1. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо бічне ребро дорівнює 3 см, а сторони основ — 5 і 1 см. (Відповідь. $10\frac{1}{3}$ см^3.)
2. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють 245 см^2 і 80 см^2, а висота повної піраміди — 35 см. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди. (Відповідь. 2325 см^3.)
3. Об'єм зрізаної піраміди дорівнює 1720 см^3, її висота — 20 см, відповідні сторони двох основ відносяться, як 5:8. Знайдіть площі основ зрізаної піраміди. (Відповідь. 50 см^2, 128 см^2.)
4. У трикутній зрізаній піраміді висота дорівнює 10 см, сторони однієї основи — 27 см, 29 см, 52 см, а периметр другої основи дорівнює 72 см. Знайдіть

об'єм зрізаної піраміди. (Відповідь. 1900 см^3.)

5. Знайдіть об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, якщо бічне ребро дорівнює *l*, а сторони основ дорівнюють *a* і *b* *(a > b)*.

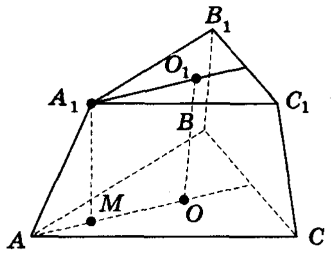


Рис. 162

Розв'язання

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна зрізана піраміда (рис. 162), у якої $AB = a$, $A_1B_1 = b$; $AA_1 = l$; точки O і O_1 — центри основ. Використовуючи властивість правильних трикутників, маємо:

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}},\ A_1O_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Проведемо $A_1M \perp (ABC)$, тоді $AM = AO - A_1O_1 = \frac{a-b}{\sqrt{3}}$.

Із ΔAA_1M $A_1M = \sqrt{AA_1^2 - AM^2} = \sqrt{l^2 - \frac{(a-b)^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3l^2-(a-b)^2}$.

Об'єм V піраміди дорівнює:

$$V = \frac{1}{3}AM \cdot \left(\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{A_1B_1^2\sqrt{3}}{4}} + \frac{A_1B_1^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3l^2-(a-b)^2}\cdot\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\cdot\sqrt{3l^2-(a-b)^2}.$$

Відповідь. $\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\cdot\sqrt{3l^2-(a-b)^2}$.

6. Задача № 46 (с. 112).

Об'єми подібних тіл

Пояснення можна зробити так, як це зроблено в п. 72 § 7 підручника.

Розв'язування задачі № 48 (с. 112).

III. Домашнє завдання

§ 7, п. 71, 72; контрольне запитання № 9; задачі № 45, 47 (с. 112).

IV. Підведення підсумку уроку

Запитання до класу

1) Запишіть формулу, за якою можна обчислити об'єм зрізаної піраміди.
2) Як відносяться об'єми подібних тіл?
3) Ребро одного куба удвічі більше за ребро другого куба. У скільки разів об'єм першого куба більший за об'єм другого?
4) Як зміниться об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо сторону її основи збільшити у 3 рази, а висоту зменшити у 2 рази?
5) Як відносяться об'єми двох кубів, якщо діагональ одного з них дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а ребро другого $\sqrt{2}$ см?