УРОК № 37

Тема уроку. *Об'єм піраміди.*
Мета уроку: *виведення формули об'єму піраміди; формування умінь знаходити об'єми пірамід.*
Обладнання: *моделі пірамід.*

І. Перевірка домашнього завдання

Перевірити наявність виконаного домашнього завдання та відповісти на запитання, які виникли в учнів при розв'язуванні задач.

ІІ. Аналіз самостійної роботи, проведеної на попередньому уроці

ІІІ. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Теорема про об'єм піраміди

Доведення теореми про об'єм піраміди можна провести у відповідності до п. 69, 70 § 7 підручника. Але враховуючи, що учні з курсу алгебри і початків аналізу знайомі із загальною формулою $V=\int_a^b S(x)dx$ для обчислення об'ємів тіл, можна довести теорему про об'єм піраміди по-іншому.

Теорема

Об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту, тобто $V=\frac{1}{3}SH$, де S — площа основи піраміди, H — її висота.

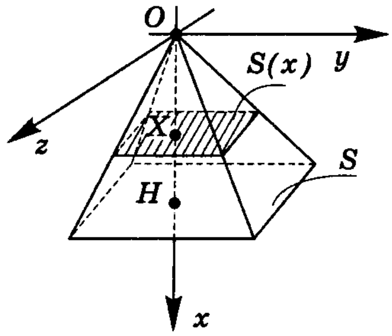

Рис. 153

Доведення

Нехай дано піраміду, площа основи якої S, а висота H (рис. 153).

Введемо систему координат так, щоб вершина піраміди була початком координат, а вісь Ox направимо перпендикулярно до основи піраміди.

Кожна січна площина, яка перпендикулярна до осі Ox, перетинає піраміду по многокутнику, який подібний основі призми. Площу одержаного перерізу позначимо через $S(x)$. Тоді $\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2}$ звідси $S(x)=\frac{S}{H^2}x^2$.

Використовуючи формулу $V=\int_a^b S(x)dx$ для обчислення об'єму тіла при $a=0$; $b=H$, одержимо: $V=\int_0^H S(x)dx=\int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx=\frac{S}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=$

$=\frac{S}{H^2}\cdot\left(\frac{H^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{S}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}=\frac{1}{3}SH$.

Теорему доведено.

Розв'язування задач

1. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює 3 см, бічне ребро — 5 см. Знайдіть об'єм піраміди. *(Відповідь.* 32 см^3.*)*
2. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см, висота піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть об'єм піраміди. *(Відповідь.* 24 см^3.*)*
3. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, висота — 4 см. Знайдіть об'єм піраміди. *(Відповідь.* $9\sqrt{3}$ см^3.*)*
4. Задача № 33 (1, 3) (с. 111).
5. Задача № 34 (с. 111).

Знаходження об'єму піраміди

Розв'язування задач

1. Задача № 36 (с. 111).
2. Задача № 37 (с. 111).
3. Задача № 40* (с. 111).
4. Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює Q**,** бічна поверхня — *S*. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

Нехай *a* — довжина сторони основи, тоді $a^2 = Q$; $2al = S$, де l — апофема, $l = \frac{S}{2a}$. Знайдемо висоту *H* піраміди:

$$H = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{S^2}{4a^2} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{S^2}{4Q} - \frac{Q}{4}} = \sqrt{\frac{S^2 - Q^2}{4Q}} = \frac{\sqrt{S^2 - Q^2}}{2\sqrt{Q}}.$$

Об'єм *V* дорівнює: $V = \frac{1}{3}S_{осн}H = \frac{1}{3}Q\frac{\sqrt{S^2 - Q^2}}{2\sqrt{Q}} = \frac{1}{6}\sqrt{Q\left(S^2 - Q^2\right)}$.

Відповідь. $\frac{1}{6}\sqrt{Q\left(S^2 - Q^2\right)}$.

5. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює *a*, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

Нехай *SABC* — правильна піраміда (рис. 154), в якій AB = *BC* = AC = *a; SO* ⊥ (ABC); <*SBO = a.* Площа основи $S_1 = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, *OB* — радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, тому $0B = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Далі із ΔSOB SO = *OB tg<SBO*= $\frac{a}{\sqrt{3}}$ tgα .

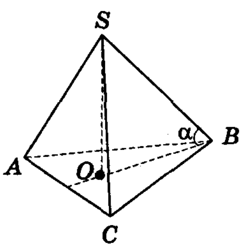

Рис. 154

Отже, шуканий об'єм V дорівнює: $V = \frac{1}{3}S_1 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3 tg\alpha}{12}$.

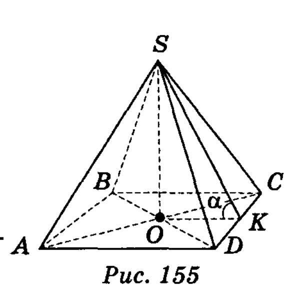

Рис. 155

Відповідь. $\frac{a^3 tg\alpha}{12}$.

6. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює *H,* а бічна грань утворює з основою кут α. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

Нехай *SABCD* — правильна чотирикутна піраміда (рис. 155), в якій SO ⊥ (ABC), SO = *H.* Проведемо *OK* ⊥ *DC,* за теоремою протри перпендикуляри маємо: *SK* ⊥ *CD;* отже, <*SKO* = α.

Із Δ*SKO OK* = *OS* ctg <*SKO* = H ctg α.

Оскільки AD = 2·OK , то одержуємо: AD = 2*Hctg*α. Тоді площа основи $S_1 = AD^2 = 4H^2 \operatorname{ctg}^2\alpha$. Отже, шуканий об'єм

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot OS = \frac{1}{3} H^2 ctg^2\alpha \cdot H = \frac{4}{3} H^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Відповідь. $\frac{4}{3} H^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

7. Основа піраміди — ромб з гострим кутом α. Всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, дорівнюють *h* і нахилені до основи під кутом β. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

Нехай *SABCD* — дана піраміда (рис. 156); *ABCD* — ромб, <*BAD* = α; SO ⊥ (ABC).

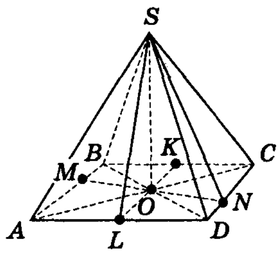

Рис. 156

Проведемо MN ⊥ BA , LK ⊥ BC, тоді SM ⊥ AB, SK ⊥ BC, SN ⊥ DC, SL ⊥ AD (за теоремою про три перпендикуляри), і, отже, SM = *SK* = *SN* = SZ, = *h,* <*SMO* = <*SKO* = <*SNO* = <*SLO* = β. Оскільки двогранні кути при основі піраміди рівні, то точка O — центр кола, вписаного в ромб *ABCD.*

Із ΔSLO SO = SL sin <SLO = h sin β;

LO = SL cos <SLO = h cos β.

Враховуємо, що LK = 2*h* cos β. Сторона ромба $AB = \frac{LK}{\sin < BAD} = \frac{2h\cos\beta}{\sin\alpha}$.

Отже, $S_1 = AB \cdot LK = \frac{2h\cos\beta}{\sin\alpha} \cdot 2h\cos\beta = \frac{4h^2\cos^2\beta}{\sin\alpha}$.

Тоді $V = \frac{1}{3} S_1 \cdot H = \frac{1}{3} S_1 \cdot SO = \frac{1}{3} \frac{4h^2\cos^2\beta}{\sin\alpha} h\sin\beta = \frac{4h^3\cos^2\beta\sin\beta}{3\sin\alpha}$.

Відповідь. $\frac{4h^3\cos^2\beta\sin\beta}{3\sin\alpha}$.

IV. Домашнє завдання

§ 7, п. 69, 70; контрольні запитання № 6—8; задачі № 33 (2), 35, 38 (с. 111).

V. Підведення підсумку уроку

Запитання до класу

1) Чому дорівнює об'єм будь-якої піраміди?
2) Запишіть формулу для обчислення об'єму піраміди.
3) Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо її висоту збільшити в *n* раз, а сторону зменшити у стільки ж раз?
4) Чи рівновеликі дві піраміди з рівними висотами, якщо їх основами є чотирикутники з відповідно рівними сторонами?