УРОК № 33

Тема уроку. Поняття об'єму. Основні властивості об'ємів. Об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Мета уроку: формування поняття об'єму; вивчення основних властивостей об'ємів; виведення формули для об'єму прямокутного паралелепіпеда; формування вмінь знаходити об'єм прямокутного паралелепіпеда.

Обладнання: моделі прямокутного паралелепіпеда.

I. Перевірка домашнього завдання

Наприкінці уроку збираються учнівські зошити для перевірки виконання домашнього завдання та ведення зошитів.

II. Аналіз виконання тематичного оцінювання № 4

Повідомити загальний результат виконання роботи та проаналізувати її.

III. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Об'єм, основні властивості об'ємів

Кожне геометричне тіло займає частину простору.

Об'ємом геометричного тіла будемо називати додатне число, яке характеризує частину простору, що займає геометричне тіло, і задовольняє таким умовам:

1. Рівні тіла мають рівні об'єми.
2. Якщо тіло розбите на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.
3. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Куб, довжина ребра якого дорівнює одиниці довжини, називають ***одиничним***.

Об'єм одиничного куба приймають за одиницю об'єму, називаючи таку одиницю кубічною.

Наприклад: кубічний сантиметр — це об'єм куба, ребро якого дорівнює 1 см (рис. 142).

Виконання вправ

Поясніть, що таке:

а) 1 кубічний кілометр;

б) 1 кубічний метр;

в) 1 кубічний дециметр;

г) 1 кубічний міліметр.

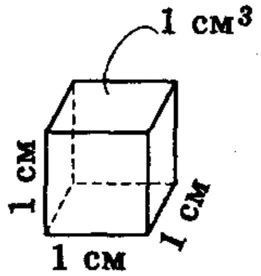

Рис. 142

Одиниці об'єму записують скорочено:

1 кубічний кілометр = 1 куб. км = 1 км^3;

1 кубічний метр = 1 куб. м = 1 м^3;

1 кубічний сантиметр = 1 куб. см = 1 см^3;

1 кубічний дециметр = 1 куб. дм = 1 дм^3;

1 кубічний міліметр = 1 куб. мм = 1 мм^3.

Одиниця об'єму 1 дм^3 має й іншу назву — 1 літр. Співвідношення між цими величинами подано нижче:

$$1\ \begin{matrix} см^3 \\ дм^3 \\ м^3 \end{matrix} = 10^3\ \begin{matrix} мм^3 \\ см^3 \\ дм^3 \end{matrix} \qquad 1\ км^3 = (10^3)^3\ м^3.$$

Виміряти об'єм, геометричного тіла — значить знайти число, яке показує, скільки одиничних кубів міститься в даному тілі.

На рис. 143 показано тіла, складені з кубів із ребром 1 см, їх об'єми дорівнюють по 6 см^3.

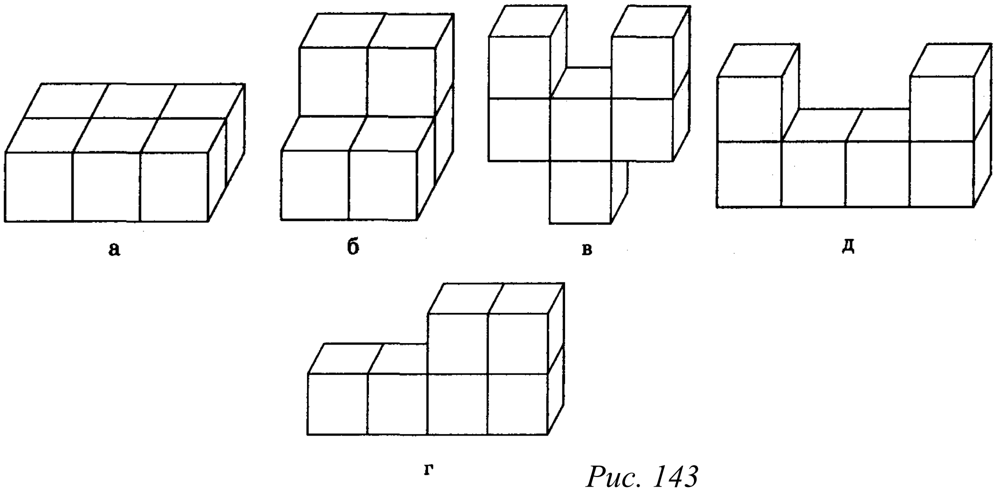

Рис. 143

Тіла, які мають рівні об'єми, називаються ***рівновеликими***. На рис. 143 тіла а—д рівновеликі.

Ми будемо далі розглядати лише ***прості тіла*** — тіла, які можна розбити на скінчене число трикутних пірамід. Вивчені многогранники: призми, піраміди, зрізані піраміди — є простими тілами.

Слід зазначити, що в «Началах» Евкліда і у творах Архімеда були виведені точні формули для знаходження об'ємів многогранників і деяких тіл обертання (циліндра, конуса, кулі та їх частин).

К. Ж. Жордан (1838—1922) — французький математик, один із засновників сучасної математики, розробив в 1892 році теорію площ і об'ємів.

У минулому одиницями вимірювання об'єму були міри посудин, які використовувались для зберігання сипких і рідких тіл. Наприклад, в Англії: 36,4 дм^3 — бушель; 4,5 дм^3 — галон; 159 дм^3 — барель; від 470 см^3 до 568 см^3 — пінта; на Русі: 12 дм^3 — відро; 1,2 дм^3 — штоф; 490 дм^3 — діжка.

У давнину міра маси, а отже і об'єму, часто збігалась із мірою вартості товару — грошовою одиницею.

На Русі основна одиниця маси — гривня — була водночас грошовою одиницею. Гривня — злиток срібла, маса якого наближено дорівнювала 1 фунту $\approx$ 96 золотникам, 1 золотник $\approx$ 4,3 г.

У другій половині XIII ст. гривню почали рубати пополам і назвали рублем, який із XV ст. став основною грошовою одиницею.

Зараз в Україні гривня — грошова одиниця.

Розв'язування задач

1. Два тіла рівні. Чи рівновеликі вони?

2. Два тіла рівновеликі. Чи рівні вони?

Формула для об'єму прямокутного паралелепіпеда

Об'єм прямокутного паралелепіпеда можна пояснити так, як це зроблено в п. 66 § 7 підручника. Можна провести пояснення по-іншому.

Теорема

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто якщо *a, b, c* — лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда, то його об'єм V обчислюється за формулою V = *abc* .

Доведення

Розглянемо три випадки.

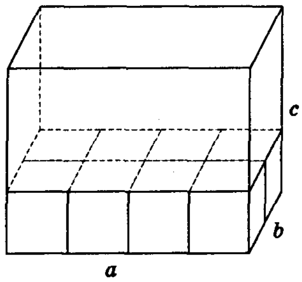

Рис. 144

1. Нехай виміри *a, b, c* прямокутного паралелепіпеда виражені натуральними числами. Такий паралелепіпед можна розрізати на с шарів, кожний з яких містить *ab* одиничних кубів (рис. 144). Отже, об'єм цього паралелепіпеда:

   V = *abc.*

2. Нехай виміри *a, b, c* прямокутного паралелепіпеда виражені раціональними числами. Зведемо ці числа до спільного знаменника, одержимо: $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{n}$, $c = \frac{q}{n}$, де *m*, *n*, *p, q* — натуральні числа.

Розіб'ємо паралелепіпед на куби, довжина ребра яких дорівнює $\frac{1}{n}$ частини одиниці довжини (рис. 145), загальна кількість таких кубів дорівнює *mpq*. Згідно з властивістю об'ємів об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку об'єму одного із цих кубів на число *mpq*. Але об'єм куба з ребром $\frac{1}{n}$ одиниці довжини дорівнює $\frac{1}{n^3}$ частини об'єму одиничного куба (рис. 146). Отже,

$$V = \frac{1}{n^3} mpq = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = abc$$

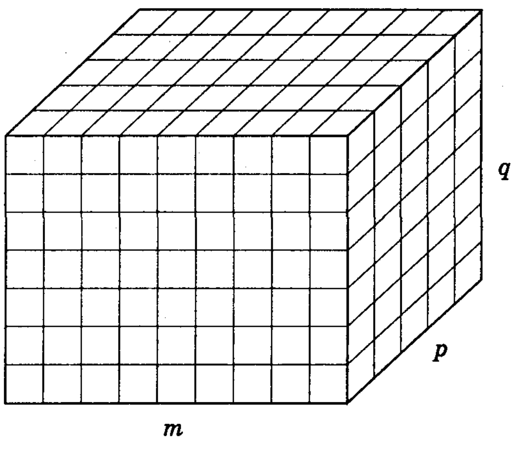

Рис. 145

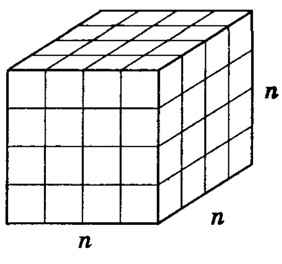

Рис. 146

3. Нехай хоча б одне з чисел *a, b, c* є число ірраціональне, тобто виражається нескінченним десятковим дробом. Позначимо через a_1 і a_2 наближені значення числа a з недостачею і з надлишком з точністю до n десяткових знаків. З тією самою точністю наближені значення з недостачею і з надлишком числа b позначимо через b_1 і b_2, а числа с — через c_1 і c_2. Кожне з чисел a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 виражається скінченним десятковим дробом. Тому за доведеним у п. 1 об'єми прямокутних паралелепіпедів з вимірами a_1, b_1, c_1 і a_2, b_2, c_2 відповідно дорівнюють $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2\ c_2$. Перший з цих паралелепіпедів можна помістити всередині даного паралелепіпеда, а інший — всередині другого (рис. 147). Отже, об'єм V даного паралелепіпеда міститься між $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2\ c_2$. Оскільки $a_1b_1c_1$ і $a_2b_2\ c_2$ — наближені значення числа abc з будь-якою наперед заданою точністю, то і в цьому випадку:
$V = abc$.

Наслідок 1. Об'єм куба дорівнює кубу його ребра: $V = a^3$, де a — довжина ребра куба.

Наслідок 2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи паралелепіпеда на висоту.

Оскільки $ab = S$, $c = h$, то $V = Sh$.

Наслідок З.У прямокутного паралелепіпеда будь-яку грань можна вважати основою.

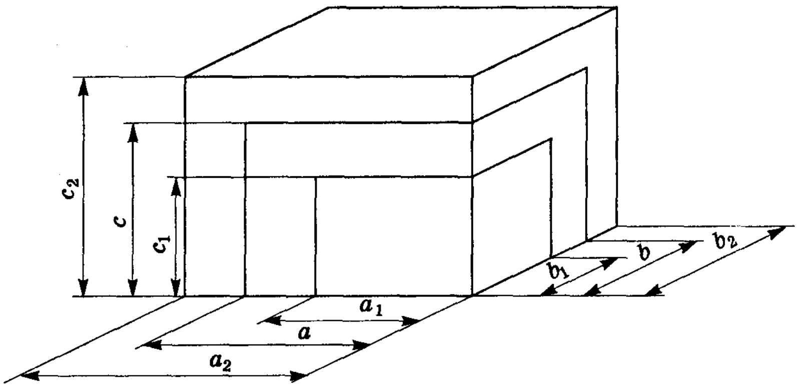

Рис. 147

Розв'язування задач

1. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює 5 см. (*Відповідь.* 125 см^3.)
2. Знайдіть об'єм куба, якщо площа повної поверхні дорівнює 150 см^2. (*Відповідь.* 125 см^3.)
3. Об'єм куба дорівнює 8 см^3. Знайдіть площу повної поверхні куба. (*Відповідь.* 24 см^2.)
4. Задача № 1 (с. 109).
5. Задача № 3 (с. 109).
6. Знайдіть об'єм куба, діагональ якого дорівнює *d*. (*Відповідь.* $\frac{d^3\sqrt{3}}{9}$)
7. Знайдіть об'єм куба, площа грані якого дорівнює Q. (*Відповідь.* $Q\sqrt{Q}$.)
8. Знайдіть об'єм куба, діагональ грані якого дорівнює *d*. (*Відповідь.* $\frac{d^3\sqrt{2}}{4}$.)

9. Знайдіть об'єм куба, площа діагонального перерізу якого дорівнює S. (*Відповідь*. $\left(\frac{S^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$.)

10. Об'єм куба V. Знайдіть довжину його діагоналі. (*Відповідь*. $\sqrt[6]{27V^2}$.)
11. Задача № 8 (с. 109).
12. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 $см^2$, 6 $см^2$, 9 $см^2$. Знайдіть його об'єм. (*Відповідь*. 18 $см^3$.)
13. Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2, S_3. Доведіть, що V = $\sqrt{S_1S_2S_3}$.

 Розв'язання

 Якщо виміри паралелепіпеда *a, b, c*, то $ab = S_1$, $ac = S_2$, $bc = S_3$. Перемноживши ці рівності, маємо: $a^2b^2c^2 = S_1S_2S_3$. Тоді об'єм паралелепіпеда $V = abc = \sqrt{S_1S_2S_3}$.
14. Задача № 10 (с. 109).

IV. Домашнє завдання

§ 7, п. 65, 66; контрольні запитання № 1—3; задачі № 2, 5, 7, 9 (с. 109).

V. Підведення підсумку уроку

Запитання до класу

1) Сформулюйте основні властивості об'єму.
2) Що таке 1 $см^3$; 1 $м^3$; 1 $мм^3$; 1 $дм^3$; 1 $км^3$?
3) Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда?
4) Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 6 см, 9 см, 7 см. (*Відповідь*. 378 $см^3$.)
5) Знайдіть об'єм піраміди, основа якої — грань куба, що має об'єм V, а вершина піраміди — точка перетину діагоналей цього куба. (*Відповідь*. $\frac{V}{6}$.)
6) У кубі, об'єм якого V, знаходиться правильний октаедр так, що всі його шість вершин збігаються з центрами граней куба. Знайдіть V об'єм октаедра. (*Відповідь*. $\frac{V}{4}$.)