

Тема уроку. Зрізана піраміда.

Мета уроку: вивчення властивості площини, яка перетинає піраміду і паралельна основі; формування поняття зрізаної піраміди.

Обладнання: моделі зрізаних пірамід.

I. Перевірка домашнього завдання

1. Один із учнів відтворює розв'язання задачі № 47* і пояснює хід розв'язування після проведення математичного диктанту.

2. Математичний диктант.

Дано піраміду, в основі якої лежить:

варіант 1 — квадрат (рис. 87);

варіант 2 — правильний трикутник (рис. 88), бічні ребра якої рівні і дорівнюють a та утворюють кут α з площиною основи. Основа висоти SO точка O є центром многокутника основи.

Знайдіть:

- а) висоту піраміди; (2 бали)
- б) радіус кола, описаного навколо основи піраміди; (2 бали)
- в) сторону основи піраміди; (2 бали)
- г) площу основи піраміди; (2 бали)
- д) радіус кола, вписаного в основу піраміди; (2 бали)
- е) висоту бічної грані, проведеної із вершини піраміди. (2 бали)

Відповідь. Варіант 1. а) $a \cdot \sin \alpha$; б) $a \cdot \cos \alpha$; в) $\sqrt{2}a \cdot \cos \alpha$; г) $2a^2 \cdot \cos^2 \alpha$;

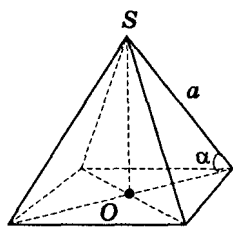


Рис. 87

д) $\frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \cos \alpha$; е) $\frac{a\sqrt{2+2\sin^2 \alpha}}{2}$

Варіант 2. а) $a \cdot \sin \alpha$; б) $a \cdot \cos \alpha$; в) $\sqrt{3}a \cdot \cos \alpha$;

г) $\frac{3\sqrt{3}a^2 \cos^2 \alpha}{4}$; д) $\frac{1}{2} a \cdot \cos \alpha$; е) $\frac{a\sqrt{1+3\sin^2 \alpha}}{2}$

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Теорема про властивість площини, яка перетинає піраміду і паралельна основі піраміди.

Формулюється й доводиться теорема 5.5 так, як це зроблено у підручнику. Після доведення теореми слід зробити і записати в зошити такі наслідки (рис. 89):

- Переріз піраміди площиною, яка паралельна до площини основи, є многокутник, подібний даному: $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$.
- Бічні ребра і висота піраміди діляться площиною, яка паралельна до основи піраміди, на пропорційні відрізки:

$$\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S} = \frac{CC_1}{C_1S} = \frac{DD_1}{D_1S} = \frac{OO_1}{O_1S}$$

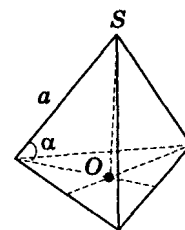


Рис. 88

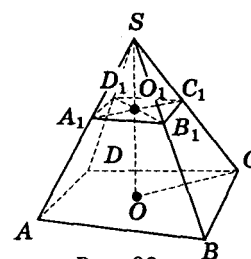


Рис. 89

3. Площі перерізу і основи піраміди відносяться як квадрати їх відстаней від

$$\frac{S_{пер}}{S_{осн}} = \frac{O_1S^2}{OS^2}$$

вершини:

$$\text{Оскільки } ABCBD \sim A_1B_1C_1D_1, \text{ то } \frac{S_{пер}}{S_{осн}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2}$$

$\Delta A_1SO \sim \Delta ASO$ і $\Delta A_1SB_1 \sim \Delta ASB_1$, тому $\frac{O_1S}{OS} = \frac{A_1S}{AS}$ і $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1S}{AS}$, звідси

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_1S}{OS} \text{ Отже, } \frac{S_{пер}}{S_{осн}} = \frac{O_1S^2}{OS^2}$$

Розв'язування задач

1. У піраміді проведено переріз паралельно до основи через середину висоти.

Площа основи дорівнює S . Знайдіть площу перерізу. (Відповідь. $\frac{S}{4}$.)

2. На якій відстані від вершини піраміди з висотою h , потрібно провести

переріз, паралельний до основи, щоб площа перерізу дорівнювала: а) $\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{n}$ площі основи? (Відповідь, а) $\frac{h}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{h}{2}$; в) $\frac{h}{\sqrt{n}}$.)

3. У піраміді переріз, паралельний до основи, ділить висоту у відношенні 3 : 4 (в напрямку від вершини до основи), а площа перерізу менша площі основи на 200 см^2 . Знайдіть площу основи. (Відповідь. 245 см^2 .)

4. Бічне ребро піраміди розділили на 10 рівних частин і через точки поділу провели площини, паралельні основі. Знайдіть площі перерізів, якщо площа основи піраміди дорівнює δ . (Відповідь. $0,01 S$; $0,04 S$; ...; $0,81 S$.)

5. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту у відношенні 2 : 3 (починаючи від вершини). Знайдіть площу перерізу, якщо вона менша за площу основи на 84 см^2 . (Відповідь. 16 см^2 .)

Поняття зрізаної піраміди

Зрізаною пірамідом називається частина піраміди, що обмежена основою і січною площиною, яка паралельна основі.

Демонструються моделі зрізаних пірамід.

Паралельні грані зрізаної піраміди називають її **основами**, а всі інші — **бічними** гранями.

Основи зрізаної піраміди — подібні багатокутники, їх відповідні сторони попарно паралельні, тому бічні грані зрізаної піраміди — трапеції.

Висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, проведений із якої-небудь точки однієї основи на площину другої основи. Висотою зрізаної піраміди називають також відстань між площинами її основ.

Переріз площиною, яка проходить через два бічні ребра зрізаної піраміди, які не лежать в одній грані, називається **діагональним**.

Щоб побудувати зрізану піраміду, спочатку будують повну піраміду, проводять переріз, паралельний основі, а потім зайву верхню частину стирають

(рис. 90).

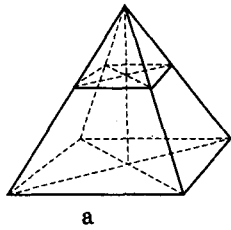
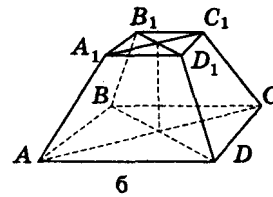


Рис. 90



Розв'язування задач

1. Користуючись рис. 90, б, назвіть основи, бічні грані, бічні ребра, ребра основи зрізаної піраміди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
2. Побудуйте трикутну зрізану піраміду.
3. Периметр більшої із основ зрізаної піраміди дорівнює P , площа її дорівнює S . Знайдіть периметр і площу меншої основи зрізаної піраміди, якщо відомо, що дана зрізана піраміда одержана в результаті перетину площиною, паралельною основі повної піраміди, яка ділить висоту повної піраміди у

відношенні 2: 3 (рахуючи від вершини). (Відповідь. $\frac{2P}{5}$; $\frac{4S}{25}$.)

4. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють 9 см^2 і 25 см^2 . Знайдіть площу перерізу, проведеного через середину висоти піраміди паралельно основам. (Відповідь. 16 см^2 .)
5. Через середину висоти зрізаної піраміди паралельно основам проведено переріз. Знайдіть площу перерізу, якщо площі основ дорівнюють Q_1 і Q_2 .

(Відповідь. $\frac{(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2}{4}$.)

III. Домашнє завдання

§ 5, п. 49; контрольні запитання № 31—32, задачі № 53—55 (с. 80).

IV. Підведення підсумку уроку

Запитання до класу

- 1) Сформулюйте властивість площини, яка перетинає піраміду і паралельна основі піраміди.
- 2) Що називається зрізаною пірамідою?
- 3) Заповніть пропуски:
 - а) основи зрізаної піраміди — ...;
 - б) перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи зрізаної піраміди на площину другої основи, називається...;
 - в) відстань між основами зрізаної піраміди називають...;
 - г) в зрізаній піраміді бічні грані — ...;
 - д) переріз площиною, що проходить через два бічні ребра зрізаної піраміди, які не лежать в одній грані, називається...
- 4) Дано зрізану піраміду $ABCA_1 B_1 C_1$ (рис. 91). Укажіть, які із наведених тверджень правильні, а які — неправильні:
 - а) площини ABC і $A_1 B_1 C_1$ паралельні;
 - б) всі грані зрізаної піраміди — трикутники;

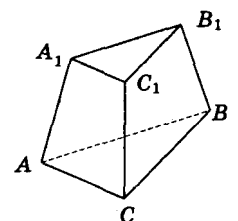


Рис. 91

- в) всі грані зрізаної піраміди — трапеції;
 - г) висота бічної грані може дорівнювати висоті зрізаної піраміди;
 - д) трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні;
 - е) трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні;
 - є) довжина ребра AA_1 може дорівнювати висоті зрізаної піраміди;
 - ж) довжини ребер AA_1 , BB_1 , CC_1 не можуть бути рівними;
 - з) довжина ребра AC може дорівнювати довжині ребра A_1C_1 .
- Відповідь, а) Так; б) ні; в) ні; г) так; д) ні; е) так; є) так; ж) ні; з) ні.*