

## УРОК № 11

**Тема уроку.** Побудова піраміди та її перерізів.

**Мета уроку:** формування понять переріз піраміди, діагональний переріз, умінь будувати піраміди та їх перерізи.

**Обладнання:** моделі пірамід.

### I. Перевірка домашнього завдання

Обговорення розв'язування домашніх задач № 42, 45 і 49 за записами, зробленими на дошці на початку уроку.

Розв'язання задачі № 42

Нехай  $SABCD$  — піраміда, у якої  $ABCD$  — прямокутник;  $AB = 6$  см,  $BC = 8$  см,  $SA = SB = SC = SD = 13$  см;  $SO \perp (ABC)$  (рис. 65).

Точка  $O$  — точка перетину діагоналей  $AC$  і  $BD$ . (?)<sup>1</sup>

Із  $\triangle ABC$   $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$  (см). (?)

Знаком (?) позначено в розв'язанні місця, які потребують теоретичного обґрунтування.

$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$  (см). (?)

Із  $\triangle AOS$   $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$  (см). (?)

**Відповідь.** 12 см.

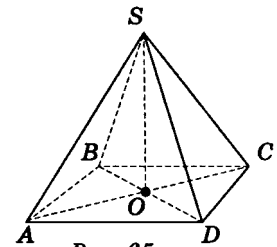


Рис. 65

<sup>1</sup> Знаком (?) позначено в розв'язанні місця, які потребують теоретичного обґрунтування.

### Розв'язання задачі № 45

Нехай  $SABC$  — піраміда, у якій  $ABC$  — основа,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  см,  $BC = 8$  см;  $SO \perp (ABC)$  (рис. 66). Проводимо  $OM \perp AB$ ,  $ON \perp BC$ ,  $OP \perp AC$ , тоді  $SM \perp AB$ ,  $SN \perp BC$ ,  $SP \perp AC$ . (?) Отже,  $\angle SMO = \angle SNO = \angle SPO = 60^\circ$ . (?) Із рівності цих кутів випливає, що точка  $O$  — центр кола, вписаного в основу.

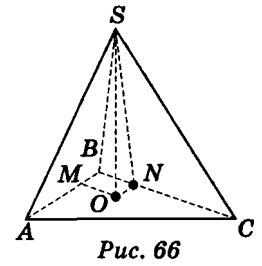


Рис. 66

(?) Із  $\triangle ABC$   $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$  (см) (?).

$$OM = \frac{AB + BC - AC}{2} = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2 \text{ (см) (?)}.$$

Із  $\triangle SON$ :  $SO = ON \operatorname{tg} \angle SNO = 2 \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$  (см) (?).

*Відповідь.*  $2\sqrt{3}$  см.

### Розв'язання задачі № 49

Нехай  $SOABC$  — піраміда;  $OABC$  — квадрат;  $AB = 20$  дм;  $SO \perp (ABC)$ ;  $SO = 21$  дм (рис. 67).

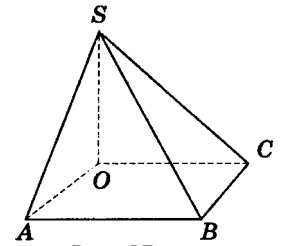


Рис. 67

$S_{\text{біч}} = S_{SOA} + S_{SOC} + S_{SBC} + S_{SAB}$ .  $\triangle SOA = \triangle SOC$ . (?)  $\triangle SCB = \triangle SAB$ . (?)

$$S_{\text{біч}} = 2S_{SOA} + 2S_{SAB}. \quad (?) \quad S_{SOA} = \frac{1}{2} OA \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 \text{ (дм}^2\text{)}. \quad (?)$$

Із  $\triangle SOA$ :  $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$  (дм). (?)  $\triangle SAB$  — прямокутний (?),

тоді:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} SA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 20 = 290$  (дм<sup>2</sup>). (?)

$$S_{\text{біч}} = 2 \cdot 210 + 2 \cdot 290 = 2 \cdot 500 = 1000 \text{ (дм}^2\text{)} = 10 \text{ (м}^2\text{)}.$$

*Відповідь.*  $10 \text{ м}^2$ .

## II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

### Правила зображення піраміди

Зображення піраміди можна починати із зображення її основи. Правила зображення многокутників нам відомі. Згадаємо їх.

#### Запитання до класу

- 1) Як зображуються рівносторонній, рівнобедрений, прямокутний трикутники?
- 2) Що є зображенням паралелограма (прямокутника, ромба, квадрата)?
- 3) Що є зображенням трапеції (рівнобічної, прямокутної)?
- 4) Що є зображенням довільного чотирикутника (не паралелограма і не трапеції)?
- 5) Що є зображенням правильного шестикутника?

Після зображення основи позначають вершину піраміди, яку сполучають бічними ребрами з вершинами основи, невидимі ребра зображають штриховими лініями. Для більшої наочності рисунка висоту піраміди зображають «вертикальним відрізком».

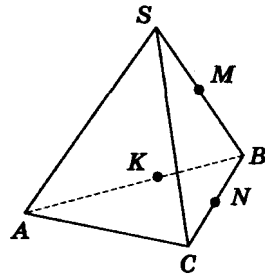


Рис. 68

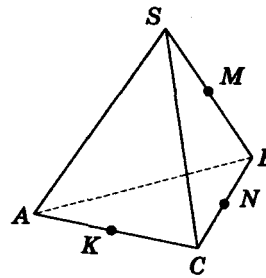


Рис. 69

### Виконання вправ

1. Побудуйте зображення тетраедра.
2. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутник, а основа висоти є точкою перетину діагоналей прямокутника.
3. Побудуйте зображення трикутної піраміди, в основі якої лежить правильний трикутник, а основа висоти є центром трикутника основи.
4. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить квадрат, а одне з бічних ребер перпендикулярне до основи.
5. Побудуйте зображення чотирикутної піраміди, в основі якої лежить ромб, а одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи.

### Правила побудови перерізів піраміди

Побудова перерізу піраміди зводиться, як правило, до побудови прямих, які є прямими перетину заданої січної площини з площинами граней піраміди.

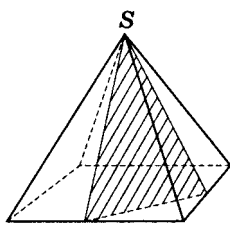


Рис. 70

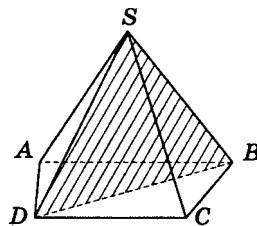


Рис. 71

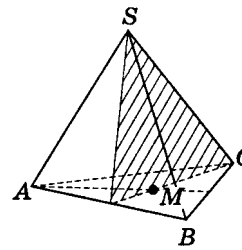


Рис. 72

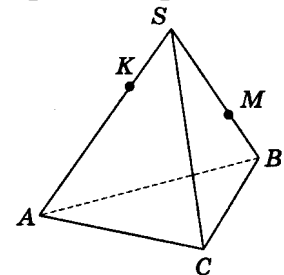


Рис. 73

### Виконання вправ

1. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною  $MNK$  (рис. 68, с. 65)
2. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною, яка проходить через точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$  — середини ребер  $SB$ ,  $BC$ ,  $AC$  відповідно (рис. 69, с. 65). Перерізами піраміди площинами, які проходять через її вершину є трикутники (рис. 70).

**Діагональним перерізом** піраміди називається переріз піраміди площиною, яка проходить через два несусідні бічні ребра піраміди (рис. 71).

### Виконання вправ

1. Доведіть, що діагональні перерізи піраміди — трикутники.
2. Скільки діагональних перерізів можна провести в  $n$ -кутній піраміді ( $n > 3$ ) ?

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

(Відповідь.  $\frac{n(n-3)}{2}$  .)

3. Доведіть, що переріз, який проходить через висоту піраміди, перпендикулярний до площини її основи.
4. Побудуйте переріз тетраедра  $SABC$  площиною, яка проходить через ребро  $SC$

і точку перетину медіан грані  $ABC$ . (Відповідь. Рис. 72).

5. Знайдіть точку перетину прямої  $KM$  з площиною основи піраміди  $SABC$  (рис. 73).

6. Побудуйте пряму перетину площини  $KMN$  з площиною основи піраміди  $SABC$  (рис. 74). (Відповідь. Шукана пряма  $XK$ , рис. 75.)

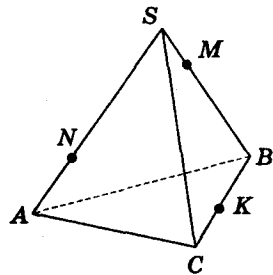


Рис. 74

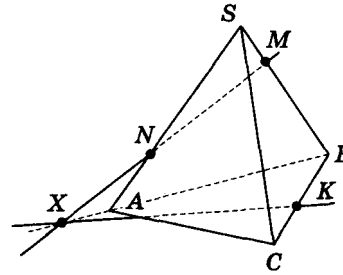


Рис. 75

При побудові перерізів піраміди січною площиною використовують метод слідів та метод внутрішнього проектування. Згадаємо суть методу слідів при побудові перерізів:

- 1) будується лінія перетину (слід) січної площини з площиною грані;
- 2) знаходяться точки перетину січної площини з ребрами многогранника;
- 3) будується переріз (поспідовно з'єднуємо одержані точки).

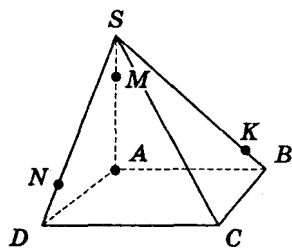


Рис. 76

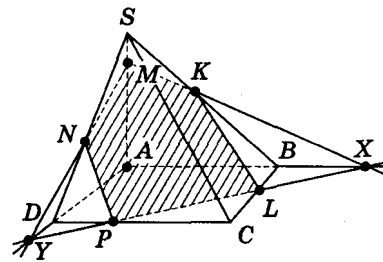


Рис. 77

**Розглянемо приклад.**

Задано піраміду  $SABCD$ . Побудуйте переріз піраміди площиною  $MNK$ , де  $M \in AS, N \in SD, K \in SB$  (рис. 76).

Розв'язання

$MK$  — слід  $(MNK)$  на  $(SAB)$ . Знайдемо точку  $X$  перетину прямої  $MK$  і прямої  $AB$  (рис. 77).

$MN$  — слід  $(MNK)$  на  $(SAD)$ . Знайдемо точку  $Y$  перетину прямої  $MN$  і прямої  $AD$ :

$XY$  — слід  $(MNK)$  на  $(ABC)$ . Точки  $P$  і  $L$  — точки перетину  $XY$  з ребрами  $DC$  і  $CB$ .

Відповідь.  $LKMNP$  — шуканий переріз.

Далі розглядається задача на побудову перерізу піраміди площиною, яка задана точкою  $A$  на поверхні піраміди і слідом  $g$  січної площини на площині її основи із п. 48 § 5 підручника.

Крім методу слідів для побудови перерізів піраміди можна використати метод внутрішнього проектування (центрального). Суть методу полягає в наступному:

- 1) будуються центральні проєкції точок, що задають переріз, на площину основи; на основі вибирається четверта точка — одна із вершин основи, яка служить проєкцією однієї із вершин перерізу;

- 2) проводяться діагоналі одержаного чотирикутника;
- 3) на одній із прямих перерізу будується точка, проекцією якої є точка перетину діагоналей чотирикутника;
- 4) за допомогою побудованої точки знаходиться вершина перерізу.

**Розглянемо приклад.**

Задано піраміду  $SABCD$ . Побудуйте переріз піраміди площиною  $MNK$ , де  $M \in AS$ ,  $N \in SD$ ,  $K \in SB$  (рис. 78).

Розв'язання

Центральними проекціями точок  $M$ ,  $N$ ,  $K$  на площину  $ABC$  є точки  $A$ ,  $D$ ,  $B$ . У чотирикутнику  $ABCD$  проведемо діагоналі  $AC$  і  $BD$ , які перетинаються в точці  $O$  (рис. 79).

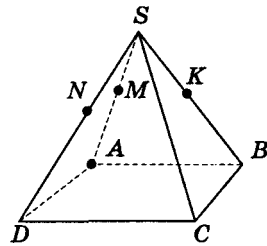


Рис. 78

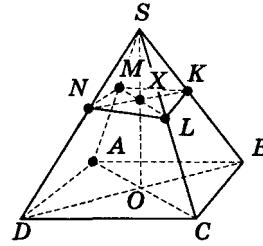


Рис. 79

Прямі  $SO$  і  $NK$  перетинаються в точці  $X$ , центральною проекцією якої є точка  $O$ . Знаходимо точку  $L$  — точку перетину прямих  $MX$  і  $SC$ .

*Відповідь.*  $LKMN$  — шуканий переріз.

**III. Домашнє завдання**

§ 5, п. 48; контрольні запитання № 28—30; задачі № 50—52 (с. 80).

**IV. Підведення підсумку уроку**

**Запитання до класу**

- 1) Якою фігурою є переріз піраміди площинами, які проходять через її вершину?
- 2) Що таке діагональний переріз піраміди?
- 3) Якою фігурою є діагональний переріз піраміди? Чому?
- 4) Які методи побудови перерізів піраміди вам відомі? У чому їх суть?