

**Тема уроку.** Прямокутний паралелепіпед.

**Мета уроку:** формування понять: прямокутний паралелепіпед, куб, лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда; вивчення властивостей діагоналей прямокутного паралелепіпеда.

**Обладнання:** моделі прямокутних паралелепіпедів, схема «Види паралелепіпедів» (див. с. 45).

### **I. Перевірка домашнього завдання**

1. Фронтальне опитування.

- 1) Дайте означення паралелепіпеда.
  - 2) Сформулюйте відомі вам властивості граней і ребер паралелепіпеда.
  - 3) Сформулюйте відомі вам властивості діагоналей паралелепіпеда.
  - 4) Чим є для паралелепіпеда точка перетину його діагоналей?
2. Перевірити правильність виконання задач № 29 і 32 можна за допомогою запитань. Запитання до задачі № 29
- 1) Яка фігура лежить в основі паралелепіпеда? (*Відповідь.* Паралелограм.)
  - 2) За якою формулою можна знайти площу основи? (*Відповідь.*  $S = ab \sin \gamma$ .)
  - 3) Чому дорівнює площа основи паралелепіпеда? (*Відповідь.*  $24 \text{ м}^2$ .)
  - 4) Користуючись якою теоремою, можна знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда? (*Відповідь.* Теоремою про площу бічної поверхні прямої призми.)
  - 5) Чому дорівнює площа бічної поверхні паралелепіпеда? (*Відповідь.*  $140 \text{ м}^2$ .)
  - 6) Чому дорівнює повна поверхня паралелепіпеда? (*Відповідь.*  $188 \text{ м}^2$ .)

*Запитання до задачі № 32*

- 1) Яка фігура лежить в основі паралелепіпеда? (*Відповідь.* Ромб.)
  - 2) Чому дорівнює менша діагональ основи? (*Відповідь.*  $a$ .)
  - 3) Чому дорівнює менша діагональ паралелепіпеда? (*Відповідь.*  $a\sqrt{2}$ .)
  - 4) Чому дорівнює більша діагональ основи? (*Відповідь.*  $a\sqrt{3}$ .)
  - 5) Чому дорівнює більша діагональ паралелепіпеда? (*Відповідь.*  $2a$ ,  $a\sqrt{2}$ .)
3. Самостійна робота.

Наводимо дві самостійні роботи, кожену з яких подано у двох варіантах. Учитель обирає одну із них, яка відповідає рівню навчальних можливостей класу.

#### **Самостійна робота № 1**

В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб. Висота паралелепіпеда дорівнює 8 см, діагоналі паралелепіпеда дорівнюють:

варіант 1 — 10 см і  $\sqrt{89}$  см;

варіант 2 — 17 см і 10 см. Знайдіть:

- а) довжину більшої діагоналі основи; (2 бали)
- б) меншу діагональ основи; (2 бали)
- в) сторону основи паралелепіпеда; (2 бали)
- г) площу основи паралелепіпеда; (2 бали)
- д) площу бічної поверхні паралелепіпеда; (2 бали)

е) кут нахилу більшої діагоналі паралелепіпеда до площини основи. (2 бали)  
Відповідь.

Варіант 1. а) 6 см; б) 5 см; в)  $\frac{\sqrt{61}}{2}$  см; г)  $15 \text{ см}^2$ ; д)  $16 \sqrt{61} \text{ см}^2$ ; е)  $\arcsin \frac{4}{5}$ .

Варіант 2. а) 15 см; б) 6 см; в)  $\frac{3}{2} \sqrt{29}$  см; г)  $45 \text{ см}^2$ ; д)  $48 \sqrt{29} \text{ см}^2$ ; е)  $\arcsin \frac{8}{17}$ .

### Самостійна робота № 2

В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб, менша діагональ якого дорівнює  $d$ . Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює  $2d$  і утворює кут  $\alpha$  :

варіант 1 — з бічним ребром;

варіант 2 — з основою паралелепіпеда.

Знайдіть:

а) довжину бічного ребра; (2 бали)

б) більшу діагональ основи; (2 бали)

в) площу основи паралелепіпеда; (2 бали)

г) довжину сторони основи; (2 бали)

д) площу бічної поверхні паралелепіпеда; (2 бали)

е) кут нахилу меншої діагоналі паралелепіпеда до площини основи. (2 бали)

Відповідь.

Варіант 1. а)  $2d \cos \alpha$ ; б)  $2d \sin \alpha$ ; в)  $d^2 \sin \alpha$ ; г)  $\frac{d}{2} \sqrt{1 + 4 \sin^2 \alpha}$ ; д)  $4d^2 \cos \alpha \sqrt{1 + 4 \sin^2 \alpha}$ ; е)  $\arctg (2 \cos \alpha)$ .

Варіант 2. а)  $2d \sin \alpha$ ; б)  $2d \cos \alpha$ ; в)  $d^2 \cos \alpha$ ; г)  $\frac{d}{2} \sqrt{1 + 4 \sin^2 \alpha}$ ; д)  $4d^2 \cos \alpha \sqrt{1 + 4 \sin^2 \alpha}$ ; е)  $\arctg (2 \sin \alpha)$ .

## II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

### Прямокутний паралелепіпед

Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається **прямокутним, паралелепіпедом** (схема «Види паралелепіпедів»).

*Демонструються моделі прямокутних паралелепіпедів.*

Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники. Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні. Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називають його розмірами (вимірами). У прямокутного паралелепіпеда **три** лінійні виміри.

Прямокутний паралелепіпед, у якого лінійні виміри рівні, називається **кубом**.

*Демонструється модель куба.*

Далі формулюємо й доводимо теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.

*Наводимо зразки записів на дошці і в зошитах учнів.*

### Теорема

Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямокутний паралелепіпед;  $A_1 C = d$ ,  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $AA_1 = c$  (рис. 58. с. 50).

Довести:  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .

Доведення

$$\text{Із } \triangle AOC \quad AC^2 = AD^2 + DC^2 = a^2 + b^2.$$

$$\text{Із } \triangle AA_1C \quad A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2 = a^2 + b^2 + c^2; \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

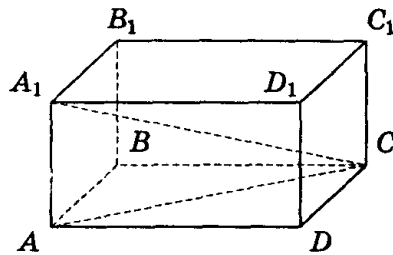


Рис. 58

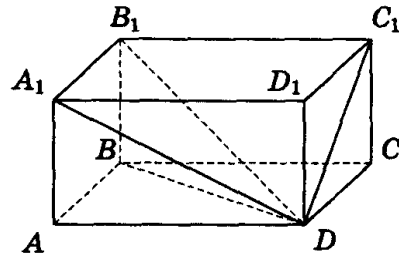


Рис. 59

### Розв'язування задач

- Задача № 35 (1; 2) (с. 79).
- Знайдіть третій вимір прямокутного паралелепіпеда, якщо два його виміри дорівнюють 6 і 7 см, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 11 см. (Відповідь. 6 см.)
- У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють  $a$  і  $b$ . Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут  $\alpha$ . Знайдіть бічне ребро. (Відповідь.  $\sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{tg} \alpha$ .)
- У прямокутному паралелепіпеді діагональ  $d$  утворює з площиною основи кут  $\alpha$ , а з бічною гранню — кут  $\beta$ . Знайдіть виміри паралелепіпеда. (Відповідь.  $d \sin \beta$ ;  $d \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$ ;  $d \sin \alpha$ .)
- Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо площі трьох його граней дорівнюють  $S_1, S_2, S_3$ . (Відповідь.  $\sqrt{\frac{S_1 S_2}{S_3}}$ ;  $\sqrt{\frac{S_1 S_3}{S_2}}$ ;  $\sqrt{\frac{S_2 S_3}{S_1}}$ .)
- Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда, якщо діагоналі його граней мають довжину  $d_1, d_2, d_3$ . (Відповідь.  $\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}{2}}$ .)
- Доведіть, що якщо діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з площинами його граней кути  $\alpha, \beta, \gamma$ , то  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ .

Доведення

Нехай в прямокутному паралелепіпеді  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (рис. 59)  $\angle B_1DC_1 = \alpha$ ,  $\angle B_1DA_1 = \beta$ ,  $\angle B_1DB = \gamma$ ,  $B_1D = d$ .

$$\text{Із } \triangle B_1DC_1 \quad BB_1 = d \sin \alpha.$$

$$\text{Із } \triangle B_1DA_1 \quad A_1B_1 = d \sin \beta.$$

$$\text{Із } \triangle B_1DB \quad BB_1 = d \sin \gamma.$$

Враховуючи властивість діагоналі прямокутного паралелепіпеда, маємо:  
 $B_1B^2 = B_1C^2 + B_1A_1^2 + B_1D^2$ , або  $d^2 = d^2 \sin^2 \alpha + d^2 \sin^2 \beta + d^2 \sin^2 \gamma$ ,  
 звідси:  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ .

- Кути, які утворює діагональ прямокутного паралелепіпеда з його ребрами, дорівнюють  $\alpha, \beta, \gamma$ . Доведіть, що  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .
- Задача № 39 (с. 79).
- Задача № 40 (с. 79).

11. Задача № 36\* (с. 79).

**III. Домашнє завдання**

§ 5, п. 45—46; контрольні запитання № 23—26; задачі № 35 (3), 37, 38 (с. 79). Підготуватися до тематичного оцінювання № 1.

**IV. Підведення підсумку уроку**

Підведення підсумку уроку можна провести у формі математичного диктанту № 1. Якщо рівень реальних навчальних можливостей учнів класу досить високий, то можна провести математичний диктант № 2.

**Математичний диктант № 1**

Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють:

варіант 1—3 см, 2 см і 6 см (рис. 60);

варіант 2—2 см, 4 см і 4 см (рис. 61).

Знайдіть:

- довжину діагоналі паралелепіпеда;
- довжину діагоналі найменшої грані;
- площу найбільшої грані;
- площу найменшої грані;
- площу поверхні паралелепіпеда;
- суму відстаней від точки перетину діагоналей паралелепіпеда до всіх його вершин.

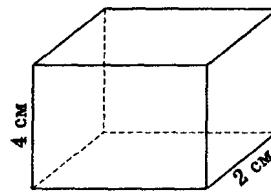


Рис. 61

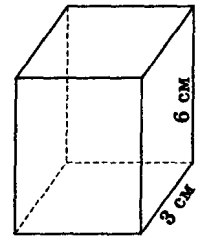


Рис. 60

*Відповідь.* Варіант 1. а) 7 см; б)  $\sqrt{13}$  см; в) 18 см<sup>2</sup>; г) 6 см<sup>2</sup>; д) 72 см<sup>2</sup>; е) 28 см.

Варіант 2. а) 6 см; б)  $2\sqrt{5}$  см; в) 16 см<sup>2</sup>; г) 8 см<sup>2</sup>; д) 64 см<sup>2</sup>; е) 24 см.

**Математичний диктант № 2**

У прямокутному паралелепіпеді діагональ утворює з основою кут  $\alpha$ , а з бічною гранню кут  $\beta$ .

варіант 1: бічне ребро дорівнює  $H$  (рис. 62);

варіант 2: діагональ основи дорівнює  $d$  (рис. 63).

Знайдіть:

- діагональ паралелепіпеда;
- сторону основи, яка лежить проти кута  $\beta$ ;
- другу сторону основи паралелепіпеда;
- площу діагонального перерізу.

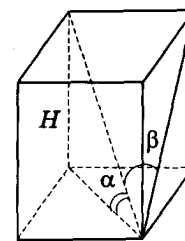


Рис. 62

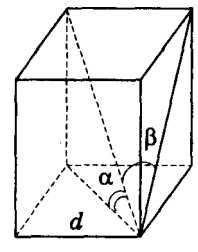


Рис. 63

*Відповідь.* Варіант 1. а)  $\frac{H}{\sin \alpha}$ ; б)  $\frac{H \sin \beta}{\sin \alpha}$ ; в)  $\frac{H}{\sin \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$ ; г)  $H^2 \operatorname{ctg} \alpha$ .

Варіант 2. а)  $\frac{d}{\cos \alpha}$ ; б)  $\frac{d \sin \beta}{\cos \alpha}$ ; в)  $\frac{d}{\cos \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$ ; г)  $d^2 \operatorname{tg} \alpha$ .