УРОК № 7

Тема уроку. Паралелепіпед.

Мета уроку: формування понять: паралелепіпед, прямий і похилий паралелепіпед; вивчення властивостей граней, діагоналей паралелепіпеда.

Обладнання: моделі паралелепіпедів, схема «Види паралелепіпедів».

I. Перевірка домашнього завдання

1. Перевірити правильність виконання домашніх задач № 18, 23, 25 за допомогою записів на дошці, зроблених до початку уроку.

Розв'язання задачі № 18

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильна чотирикутна призма (рис. 49), $S_{ABB_1A_1} = Q$

$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot BB_1$ Q = AB BB_1 $S_{BDD_1B_1} = BD \cdot BB_1$.

Із ΔABD

$$BD = \frac{AB}{\cos < ABD} = \frac{AB}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = AB\sqrt{2}.$$

Тоді $S_{BDD_1B_1} = \sqrt{2}AB \cdot BB_1 = \sqrt{2}Q.$

Відповідь. $\sqrt{2}Q.$

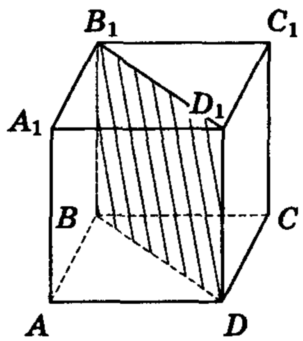

Рис. 49

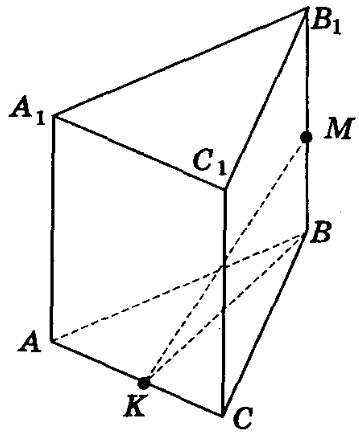

Рис. 50

Розв'язання задачі № 23

$S_{біч} = pl$ = (2+3+4)·5 = 9·5 = 45 (см²).

Відповідь. 45 см².

Розв'язання задачі № 25

Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна призма (рис. 50); AB = l; B_1M = MB.

Проведемо BK ⊥ AC, тоді MK ⊥ AC (за теоремою про три перпендикуля-ри), отже, <MKB — лінійний кут двогранного кута, <MKB = 45°.

$S_{біч} = 3AB \cdot BB_1 = 3l \cdot BB_1$.

Із ΔABK $BK = AB \cdot \sin\angle BAK = l\sin 60^0 = l\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Із ΔMKB $BM = KB \cdot \text{tg}\angle MKB = \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot \text{tg}45° = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

$S_{біч} = 3l \cdot 2BM = 3l \cdot 2\frac{l\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}l^2$.

Відповідь. $3\sqrt{3}l^2$.

2. Математичний диктант.

Наводимо два математичні диктанти. Учитель обирає один із них, який *відповідає рівню навчальних можливостей класу.*

Математичний диктант № 1

Більша діагональ правильної шестикутної призми дорівнює d і утворює кут α :

варіант 1 — з основою призми (рис. 51);

варіант 2 — з бічним ребром (рис. 52).

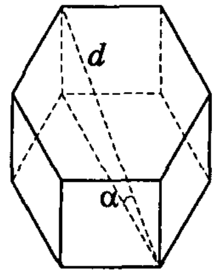

Рис. 51

Знайдіть:

а) висоту призми; (2 бали)

б) більшу діагональ основи; (2 бали)

в) сторону основи призми; (2 бали)

г) площу основи; (2 бали)

д) площу найбільшого діагонального перерізу; (2 бали)

е) площу бічної поверхні призми. (2 бали)

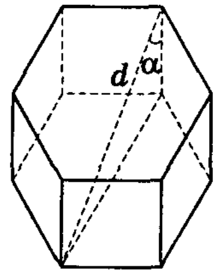

Рис. 52

Відповідь. Варіант 1. а) $d \sin \alpha$; б) $d \cos \alpha$; в) $\frac{1}{2} d \cos \alpha$;

г) $\frac{3\sqrt{3}d^2 \cos^2 \alpha}{8}$; д) $\frac{1}{2} d^2 \sin 2\alpha$; е) $\frac{3}{2} d^2 \sin 2\alpha$.

Варіант 2. а) $d \cos \alpha$; б) $d \sin \alpha$; в) $\frac{1}{2} d \sin \alpha$; г) $\frac{3\sqrt{3}d^2 \sin^2 \alpha}{8}$;

д) $\frac{1}{2} d^2 \sin 2\alpha$;е) $\frac{3}{2} d^2 \sin 2\alpha$.

Математичний диктант №2

У похилій призмі всі ребра дорівнюють a. Одна із вершин верхньої основи проектується в центр кола, описаного навколо нижньої основи. В основі призми лежить:

варіант 1 — трикутник (рис. 53);

варіант 2 — квадрат (рис. 54).

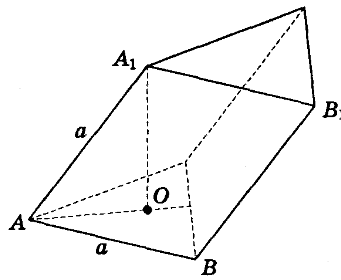

Рис. 53

Знайдіть:

а) радіус кола, описаного навколо основи; (2 бали)

б) висоту призми; (2 бали)

в) радіус кола, вписаного в основу; (2 бали)

г) висоту ромба AA_1B_1B; (2 бали)

д) площу грані AA_1B_1B; (2 бали)

е) величину кута A_1AB. (2 бали)

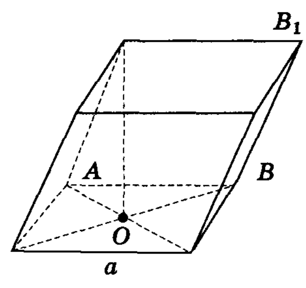

Рис. 54

Відповідь. Варіант 1. а) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

д) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; е)60°.

Варіант 2. а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$; д) $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$;е) 60°.

II. Сприйняття та усвідомлення нового матеріалу

Види паралелепіпедів

Паралелепіпедом називається призма, основа якої — паралелограм.

Демонструються моделі паралелепіпедів.

Усі шість граней паралелепіпеда — паралелограми (рис. 54). Протилежні грані паралелепіпеда рівні й лежать у паралельних площинах, протилежні ребра рівні й паралельні (чому?).

Розглядаємо теорему 5.2. Доведення цієї теореми нескладне, тому можна запропонувати учням довести її самостійно або розібрати доведення її за підручником, а потім проаналізувати.

Далі вивчаємо питання про властивість діагоналей паралелепіпеда. Доведення теореми 5.3 нескладне, тому доцільно запропонувати учням самостійно розглянути доведення цієї теореми (п. 44 § 5) за підручником. Після знайомства з доведенням провести фронтальне опитування, використовуючи рис. 104 підручника.

Запитання до класу

1) Чому $A_1A_4 \parallel A'_2A'_3$?
2) Чому $A_1A'_3 \parallel A_4A'_3$?
3) Чому $A_1A'_3$ і $A_4A'_2$ перетинаються в точці O і діляться нею пополам?
4) Чому чотирикутник $A_1A_2A'_3A'_4$ — паралелограм?
5) Чому діагоналі $A_1A'_3$ і $A_3A'_1$ перетинаються в точці O і діляться нею пополам?
6) Чим є середина будь-якої діагоналі паралелепіпеда для цього паралелепіпеда?

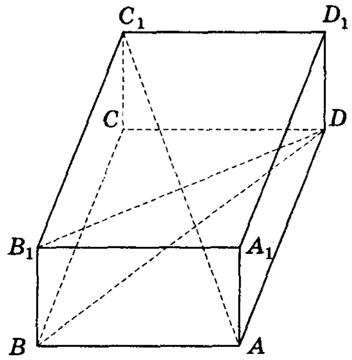

Рис. 55

Паралелепіпеди можуть бути прямими і похилими (схема «Види паралелепіпедів»),

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називається ***прямим паралелепіпедом.*** У ньому всі бічні грані— прямокутники, а основи — паралелограми.

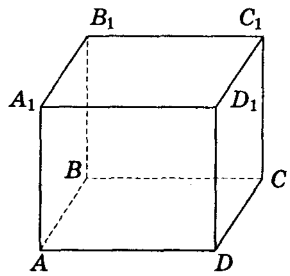

Рис. 56

Демонструються моделі прямих паралелепіпедів.

Якщо бічні ребра паралелепіпеда не перпендикулярні до площини основи, то паралелепіпед називається ***похилим.***

Демонструються моделі похилого паралелепіпеда.

З іншими видами паралелепіпедів ми детальніше познайомимо учнів на наступному уроці.

Розв'язування задач

1. Задача № 26 (с. 78).
2. Задача № 28 (с. 78).
3. Задача № 30 (с. 78).
4. Задача № 33* (с. 79).

Розв'язання

Нехай $AA_1 = 5$ см, $AB = 5$ см, $AD = 8$ см, $BD = 12$ см (рис. 55). Із ΔBB_1D

$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (см)}.$$

За властивістю діагоналей паралелограма для *ABCD* маємо:
$2(AB^2+AD^2) = BD^2 + AC^2$, звідси:

$$AC = \sqrt{2(AB^2 + AD^2) - BD^2} = \sqrt{2(6^2 + 8^2) - 12^2} = \sqrt{200 - 144} = \sqrt{56} \text{ (см)}.$$

Із ΔACC_1: $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{56 + 25} = 9$ (см).

Відповідь. 9 см і 13 см.

5. Доведіть, що в будь-якому паралелепіпеді сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів всіх його ребер.

Розв'язання

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний паралелепіпед (рис. 56). За властивістю діагоналей паралелограма маємо:

для паралелограма AA_1C_1C $AC_1^2 + A_1C^2 = 2AA_1^2 + 2AC^2$;

для паралелограма BB_1D_1D $BD_1^2 + B_1D^2 = 2BB_1^2 + 2BD^2$.

Додавши ці рівності почленно, одержимо: $AC_1^2 + A_1C^2 + BD_1^2 + B_1D^2 =$
$= 2AA_1^2 + 2AC^2 + 2BB_1^2 + 2BD^2 = 4AA_1^2 + 2(AC^2 + BD^2) = 4AA_1^2 + 2(2AB^2 + 2AD^2) =$
$= 4AA_1^2 + 4AB^2 + 4AD^2$. Отже, у будь-якому паралелепіпеді сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів всіх його ребер.

6. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, а площі діагональних перерізів дорівнюють *m* і *n*. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.
(Відповідь. $2\sqrt{m^2 + n^2}$.)

7. Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною *a*. Одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює *H*. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

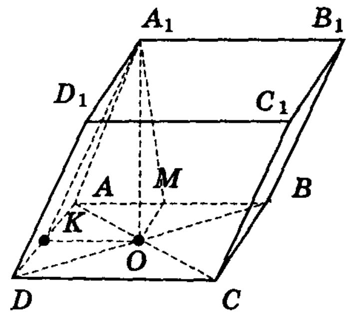

Рис. 57

Розв'язання

Нехай у паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 57) ABCD — квадрат, $A_1O \perp (ABC)$, точка O — центр квадрата, $A_1O = H$, $AB = a$.

Проведемо $OK \perp AD$, $OM \perp AB$; тоді $A_1K \perp AD$, $A_1M \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри), тобто A_1K і A_1M — висоти бічних граней ADD_1A_1 та ABB_1A_1 відповідно. $\Delta A_1OK = \Delta A_1OM$ (A_1O — спільний катет і $OK = OM = \frac{a}{2}$); звідси: $A_1K = A_1M$. Оскільки AD = AB і $A_1K = A_1M$, то $S_{ABB_1A_1} = S_{ADD_1A_1}$, тому $S_{біч} = S_{ADD_1A_1}$.

Із ΔA_1OM $A_1M = \sqrt{A_1O^2 + OM^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + a^2}$.

Тоді $S_{біч} = 4a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + a^2} = 2a\sqrt{4H^2 + a^2}$

Відповідь. $2a\sqrt{4H^2 + a^2}$.

ІІІ. Домашнє завдання

§ 5, п. 43—44; контрольні запитання № 19—22; задачі № 29; 32 (с. 78—79).

IV. Підведення підсумку уроку

Запитання до класу

1) Дайте означення паралелепіпеда.
2) Назвіть основні властивості паралелепіпеда.
3) Який паралелепіпед називається прямим; похилим?
4) Укажіть, які з наведених нижче тверджень правильні, а які — неправильні:
   а) у прямому паралелепіпеді бічне ребро перпендикулярне до сторін основи;
   б) бічне ребро паралелепіпеда перпендикулярне до діагоналей основи;
   в) у прямому паралелепіпеді всі діагоналі рівні;
   г) у прямому паралелепіпеді діагональні перерізи перпендикулярні до площини основи;
   д) існує похилий паралелепіпед з рівними діагональними перерізами;
   е) існує прямий паралелепіпед з рівними діагональними перерізами.