

Урок 55

Тема уроку: Мода і медіана. Середні значення.

Мета уроку: Ознайомити учнів з модою, медіаною і середніми значеннями, якими оперує статистика: середнє арифметичне, середнє квадратичне.

I. Перевірка домашнього завдання.

1. Фронтальна бесіда з класом за запитаннями №№ 15, 9 із “Запитання і завдання для повторення” розділу XIV.
2. Розв’язування вправи №4 із розділу XIV підручника.

II. Сприймання і усвідомлення центральних тенденцій вибірки.

Вибірка характеризується центральними тенденціями: середнім значенням, модою і медіаною. Дано означення кожній з них. Середнім значенням вибірки називається середнє арифметичне всіх її значень:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \text{ або } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

(\sum – знак суми – “сигма” велика).

Мода вибірки – те її значення, яке трапляється найчастіше. Позначається *Mo*. Медіана вибірки – це число, яке “поділяє” “навпіл” упорядковану сукупність усіх значень вибірки, тобто середня величина змінюваної ознаки, яка міститься в середині ряду, розміщеного в порядку зростання або спадання ознаки. Позначається *Me*.

Приклад 1. Нехай дано вибірку 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8. Знайдемо центральні тенденції вибірки.

Розв’язання

Мода даної вибірки $Mo = 6$, бо число 6 зустрічається найчастіше.

Середнє значення вибірки:

$$\bar{x} = \frac{2+3+4+4+6+6+6+7+7+8}{10} = \frac{53}{10} = 5,3$$

Медіана даної вибірки $Me = 6$, бо вибірка має парне число значень і її медіана дорівнює півсумі двох її середніх значень:

$$Me = \frac{6+6}{2} = 6$$

Приклад 2. Знайти центральні тенденції вибірки: 12, 17, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 13, 13.

Розв’язання

Упорядкуємо дану вибірку:

11, 12, 13, 13, 13, 14, 15, 15, 16, 17.

Мода даної вибірки: $Mo = 13$.

Середнє значення:

$$\bar{x} = \frac{11+12+13+13+13+14+15+15+16+17}{10} = \frac{139}{10} = 13,9$$

$$\text{Медіана даної вибірки: } Me = \frac{13+14}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$$

Виконання вправ

У результаті статистичних досліджень отримані певні числові значення:

а) 5, 8, 6, 6, 2, 7, 7, 7, 4, 4, 1;

б) 5, 5, 6, 6, 7, 7;

в) 1, 2, 3, 4, 5;

г) 1, 2, 2, 3, 4, 4.

Знайдіть центральні тенденції цих вибірок.

Розглянемо вибірку 0, 0, 1, 1, 3, 3, 3, 5; $n = 8$, $\bar{x} = 2$.

Знайдемо відхилення $x_i - \bar{x}$ кожного значення x_i від середнього значення \bar{x} .

Результати занесемо в таблицю.

Значення x	Середнє арифметичне \bar{x}	Відхилення $x_i - \bar{x}$
0	2	-2
0	2	-2
1	2	-1
1	2	-1
3	2	1
3	2	1
3	2	1
5	2	3
$\sum_{i=1}^8 x_i = 16$	$\sum_{i=1}^8 \bar{x} = 16$	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x}) = 0$

Сума всіх відхилень дорівнює 0.

Для будь-якої вибірки $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$, тому в статистиці користуються іншим показником – середнім квадратичним відхиленням, який знаходиться так: усі відхилення підносяться до квадрата; знаходять середнє арифметичне цих квадратів, із знайденого середнього арифметичного добувають квадратний корінь. Середнє квадратичне відхилення позначається грецькою буквою σ (“сигма” мала):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

σ^2 в статистиці називають дисперсією.

Приклад 3. Знайдемо середнє квадратичне відхилення значень вибірки: 5, 8, 10, 12, 17, 20.

Розв’язання

Знаходження середнього квадратичного подано в таблиці.

Значення x	Середнє арифметичне \bar{x}	Відхилення $x_i - \bar{x}$	Квадрат відхилення $(x_i - \bar{x})^2$	Квадратичне відхилення σ
5		-7	49	
8		-4	16	

10		-2	4	
12		0	0	
17		5	25	
20		8	64	
$\sum_{i=1}^6 x_i = 72$	$\bar{x} = \frac{72}{6} = 12$	$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x}) = 0$	$\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 158$	$\sigma = \sqrt{\frac{158}{6}} \approx 5,13$

Якщо вибірку задано статистичним рядом, то

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_m x_m}{n}, \text{ або } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i x_i ;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_m (x_m - \bar{x})^2}{n}} \text{ або } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i (x_i - \bar{x})^2} .$$

Приклад 4. Для статистичного ряду

x_i	-1	0	3	5	8
n_i	2	1	4	2	1

Знайти \bar{x} та σ .

Розв'язання

Обсяг вибірки $n = 10$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m n_i x_i = \frac{2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 8}{10} = 2,8$$

Середнє значення вибірки:

Середнє квадратичне відхилення значень:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-1-2,8)^2 \cdot 2 + (0-2,8)^2 \cdot 1 + (3-2,8)^2 \cdot 4 + (5-2,8)^2 \cdot 2 + (8-2,8)^2 \cdot 1}{10}} =$$

$$\sqrt{\frac{14,44 \cdot 2 + 7,84 \cdot 1 + 0,04 \cdot 4 + 4,84 \cdot 2 + 27,04 \cdot 1}{10}} = \sqrt{\frac{73,6}{10}} = \sqrt{7,36} \approx 2,71 .$$

Відповідь: $\bar{x} = 2,8$; $\sigma \approx 2,71$.

Виконання вправ

- Для вибірки, заданої варіаційним рядом $-20, -20, 0, 0, 0, 0, 0, 10, 10, 10$ знайдіть моду, медіану, середнє значення, середнє квадратичне відхилення.
- Для вибірки, заданої статистичним рядом

x_i	125	127	130	140
n_i	2	4	3	1

знайти \bar{x} і σ .

III. Підведення підсумків уроку.

IV. Домашнє завдання.

Розділ XIV § 4-5; Запитання і завдання для повторення розділу XIV №№ 10-14.
Вправи №№ 5-6.