УРОК 37

Тема уроку: Комбінації. Трикутник Паскаля.

Мета уроку: Познайомити учнів з комбінаціями без повторень, виведення формули для числа комбінацій з n елементів по m елементів без повторень. Вивчення властивостей чисел C_n^m, познайомити учнів з трикутником Паскаля.

І. Перевірка домашнього завдання.

Фронтальна бесіда за запитаннями .№№ 11—13, 15—16 із «Запитання і завдання для повторення» до розділу XII та перевірка правильності виконання домашніх вправ.

№ 17. Число n фотокарток, які були роздані,— це число розміщень з 35 по 2:

$$n = A_{35}^2 = 35 \cdot 34 = 1190.$$

№ 22. а) $\dfrac{(2n)!}{(2n+1)!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2n\cdot (2n+1)} = \dfrac{1}{2n+1}$;

б) $\dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-2)\cdot (k-1)} - \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-2)\cdot (k-1)\cdot k} =$

$= \dfrac{k-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (k-2)\cdot (k-1)\cdot k} = \dfrac{k-1}{k!}$.

ІІ. Сприймання і усвідомлення поняття комбінації без повторень, формули числа комбінацій з *n* елементів по *m*.

Нехай дано множину *{a, b, c}*. З елементів цієї множини можна утворити 6 двохелементних розміщень. *ab, ac, bc, ba, ca, cb.*

Це впорядковані підмножини даної множини. А скільки **невпорядкованих** двохелементних підмножин можна скласти з тих самих елементів? Тільки три: ***{ab}, {ac}, {be}.***

Будь-яка підмножина з *m* елементів даної множини, яка містить *n* елементів, називається ***комбінацією*** *з n* елементів по *m* елементів.

Число комбінацій з n елементів по m позначають символом C_n^m.

Наприклад: $C_3^2 = 3$.

З чотирьох елементів множини {a, *b, c, d}* можна утворити 6 комбінацій по 2 елементи: {a, *b*}, {*a, c*}, {*a, d*}, *{b, c*}, {*c, d*}, {*b. d*}; 3 комбінації по 3 елементи: {*a, b, c*}, {*a, b, d*}, {*b, c, d*}.

Таким чином, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 3$.

Домовилися вважати, що

$$C_n^0 = 1, \qquad C_n^1 = n, \qquad C_n^n = 1.$$

Виведемо формулу для знаходження значень C_n^m, для цього порівняємо числа C_n^m і A_n^m при одних і тих же значеннях *m* і *n*.

Кожну *m*-елементну комбінацію можна впорядкувати P_m способами. У результаті з однієї комбінації утворюється A_n^m розміщень (упорядкованих підмножин) з тих самих елементів. Отже, число *m*-елементних комбінацій у P_m разів менше за число розміщень з тих самих елементів. Тобто $A_n^m = P_n \cdot C_n^m$, звідси

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}.}$$

Число комбінацій з *n* елементів по *m* дорівнює дробу, чисельник якого е добуток *m* послідовних натуральних чисел, найбільше з яких *n*, а знаменник дробу — добуток *m* послідовних натуральних чисел.

Враховуючи, що $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ можна одержати $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Отже, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Приклад. Обчислити а) C_{10}^3; б) C_{50}^{49}.

а) $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$; б) $C_{50}^{49} = \frac{50!}{49!(50-49)!} = \frac{50!}{49!} = \frac{49!\cdot 50}{49!} = 50$

Задача. Скількома способами з 25 учнів можна вибрати 3 чергових.

Розв'язання

Вибір 3 чергових із 25 учнів — це комбінація 3 учнів із 25 учнів. Отже,

$n = C_{60}^{49} = \frac{25\cdot 24\cdot 23}{1\cdot 2\cdot 3} = 2300$.

Відповідь: 2300 способами.

Виконання вправ

1. Випишіть комбінації трьох елементів з множини *{a, b, c, d, h}.*

Відповідь: {a, b, c}, {Ь, c, d}, {c, d, h}, {a, b, d}, {b, c, h], {a, b, h}, {b, d, h}, {a, c, d}, {a, d, h}, {a, c, h}.

2. Обчисліть:

а) C_8^2; б) C_8^6; в) $C_5^4 + C_3^0$; г) $C_{100}^{100} + C_{100}^1$.

Відповіді: а) 28; б) 28; в) 6; г) 101.

3. Із 20 робітників треба виділити 6 для роботи на елеваторі. Скількома способами це можна зробити?

   Відповідь: C_{20}^6 = 38 760.

4. На полиці є 35 книжок. Скількома способами можна вибрати дві із них?

   Відповідь: C_{35}^2 = 595.

5. Скількома способами можна закреслити 6 номерів із 49 в картці «Спортлото».

   Відповідь: C_{49}^6 =13 983 816.

6. Скільки існує відрізків, кінцями яких є *n* даних точок?

   Відповідь: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

7. Скільки різних площин можна провести через *n* точок простору, із яких жодні чотири не лежать в одній площині, якщо кожна площина проходить через три із даних точок.

   Відповідь: C_n^3.

8. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого *n*-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

   Відповідь: $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(N-3)}{24}$.

9. У турнірі брало участь *n* шахістів, і кожні два шахісти зустрілись один раз. Скільки матчів було зіграно в турнірі?

   Відповідь: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

10. Скільки чоловік приймало участь у шаховому турнірі, якщо відомо, що кожний учасник зіграв з кожним із останніх по одній партії, а всього було зіграно 210 партій?

    Відповідь: 21 чоловік.

11. Розв'язати рівняння:

а) C_x^2 =21; б) 5 $C_x^3 = C_{x+2}^4$; в) $C_x^3 + C_x^2$ = 15 (*x* -1); г) $C_{y-1}^3 + C_{y-1}^2$ = 15 (*y* - *2)*.

Відповіді: а) 7; б) 14; в) 9; г) 10.

III. Сприймання і усвідомлення деяких властивостей числа комбінацій та поняття трикутника Паскаля.

1. Нехай дано множину, яка містить *n* елементів. Виберемо одну комбінацію із m елементів, цій комбінації відповідає одна комбінація невибраних *(n — m)* елементів. Кількість комбінацій із *n* елементів по *m* дорівнює C_n^m, а кількість комбінацій з *n* елементів по *(n - m)* елементів дорівнює C_n^{n-m}. Поскільки кожній комбінації вибраних *m* елементів відповідає одна комбінація невибраних *(n - m)* елементів, то $C_n^m = C_n^{n-m}$. Отже, для будь-яких *n* і *m* $(0 \le m \le n)$ справедлива рівність:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Цей же результат можна одержати безпосередньо із формули числа комбінацій, якщо записати її за допомогою факторіалів:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^{n-m}.$$

Ця властивість дає змогу спростити обчислення числа комбінацій.

Приклад. Обчислити C_{180}^{178}.

Розв'язання

$$C_{180}^{178} = C_{180}^{2} = \frac{180 \cdot 179}{1 \cdot 2} = 16110.$$

2. Розглянемо множину, яка містить *n* елементів. Виділимо *m*-елементні підмножини, і поділимо їх на дві групи: підмножини, до складу яких входить деякий елемент *a* даної множини, і підмножини, до складу яких *a* не входить. Число підмножин у першій групі дорівнює C_{n-1}^{m-1}, бо кожну таку підмножину дістають приєднанням до *a* деякої (*m*-1)-елементної підмножини. Число підмножин у другій групі дорівнює C_{n-1}^{m}. Отже, $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m}$. Цю рівність можна довести і по-іншому:

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m} = \frac{(n-1)!}{(n-1-m+1)!(m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-m)!m!} = (n-1)!\left(\frac{1}{(n-1-m+1)!(m-1)!} + \frac{1}{(n-1-m)!m!}\right) =$$

$$= (n-1)!\left(\frac{1}{(n-m-1)!(n-m)(m-1)!} + \frac{1}{(n-m-1)!(m-1)m!}\right) = (n-1)! \cdot \frac{m+n-m}{(n-m-1)!(n-m)(m-1)!m!} =$$

$$= \frac{(n-1)!n}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m.$$

3. Справедлива рівність

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Оскільки C_n^m — число m-елементних підмножин деякої множини, що містить n елементів, то $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$ — число всіх підмножин множини із n елементів. Доведемо, що число всіх підмножин множини, що містить n елементів, дорівнює 2^n.

Пронумеруємо елементи множини і для кожної підмножини даної множини побудуємо послідовність довжини *n з* нулів та одиниць за таким правилом: на m-му місці пишемо 1, якщо елемент з номером m входить до підмножини, і 0, якщо елемент з номером m не входить до підмножини. Отже, кожній підмножині відповідає своя послідовність нулів та одиниць. Наприклад, порожній множині відповідає послідовність з одних нулів, всій множині — послідовність з одних одиниць. Число всіх підмножин дорівнює числу всіх можливих послідовностей довжини n, складених з нулів та одиниць, і дорівнює $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

Виконання вправ________________________________

1. Обчисліть

   а) C_{100}^{99}; б) C_{1000}^{999}; в) C_{100}^{97}; г) C_{1000}^{998}.

   Відповіді: а) 100; б) 1000; в) 161 700; г) 499 500.

2. Випишіть всі підмножини множини $\{a, b, c\}$.

   Відповідь: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

3. Скільки підмножин має множина, яка містить:

   а) 6 елементів; б) 10 елементів; в) не містить елементів; г) n елементів. *Відповіді:* а) $2^6 = 64$; б) $2^{10} = 1024$; в) $2^0 = 1$; г) 2^n.

4. Покажіть, що істинна рівність:

$$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6.$$

5. Доведіть справедливість рівностей:

   а) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^2$; б) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

6. Обчисліть:

   а) $C_7^1 + C_7^3 + C_7^5 + C_7^7$; б) $C_7^0 + C_7^2 + C_7^4 + C_7^6$.

Відповіді: а) 64; б) 64.

7. Учень має по одній монеті в 1 коп., 2 коп., 5 коп., 10 коп., 25 коп. Скількома способами він може ці монети розкласти в дві кишені?
   Відповідь: $2^5 = 32$.

8. У деякому царстві немає двох людей, які б мали однаковий набір зубів. Скільки людей мешкає там, якщо кількість зубів у мешканців утворює всю множину можливих варіантів?

   Відповідь: $C_{32}^0 + C_{32}^1 + \ldots + C_{32}^{31} + C_{32}^{32} = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$.

Запишемо всі можливі значення C_n^m *(n = 0, 1, 2, ..., m = 0, 1, 2, ... n)* у вигляді трикутної таблиці.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}$$

Враховуючи властивості числа комбінацій C_n^m, а саме:

1) $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = \ldots = C_n^0 = C_n^n = 1$.

2) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, тоді цю таблицю легко записати у числовому вигляді:

$$\begin{array}{ccccccccccccc|c}
 & & & & & & 1 & & & & & & & n=0 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & n=1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & n=2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & n=3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & n=4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & n=5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & n=6 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}$$

Ця таблиця побудована так: у першому рядку записано 1, у другому — з боків від неї по одиниці. У кожному наступному рядку перші та останні числа — одиниці, а кожне інше дорівнює сумі двох найближчих від нього чисел зверху (властивість 2).

Слід зазначити, що числа ряду розміщені на однаковій відстані від його кінців, рівні між собою. Це випливає з рівності:

$C_n^m = C_n^{n-m}$. Сума чисел *m-го* рядка дорівнює 2^m.

Цю трикутну таблицю називають трикутником Паскаля за ім'ям французького математика Б. Паскаля (1623—1662), який займався дослідженням властивостей цієї таблиці й застосуванням їх до розв'язування задач та вправ.

IV. Підведення підсумків уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ XII § 2; Запитання і завдання для повторення розділу XII №№ 18—21.

Вправи №№ 18, 24, 29.