

УРОК 36

Тема уроку: Упорядковані підмножини даної множини. Розміщення.

Мета уроку: Познайти учнів з розміщеннями без повторень, виведення формули для числа розміщень з n елементів по m елементів. Формування умінь розв'язувати нескладні комбінаторні задачі.

I. Перевірка домашнього завдання.

1. Перевірте правильність виконання домашніх вправ за записами, підготовленими до початку уроку.

$$\frac{P_8 - P_7}{7P_7} = \frac{8! - 7!}{7 \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 8 - 7!}{7 \cdot 7!} = \frac{7!(8-1)}{7 \cdot 7!} = \frac{7! \cdot 7}{7! \cdot 7} = 1$$

№ 13. а)

$$\frac{P_{2m+1}}{P_{2m-1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1) \cdot 2m \cdot (2m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)} = \frac{2m \cdot (2m+1)}{1} = 2m \cdot (2m+1)$$

б)

$$\frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

№ 14. а)

$$\frac{(n+3)!}{n!} = \frac{n!(n+1)(n+2)(n+3)}{n!} = (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\text{б) } \frac{n!}{n!} = (n+1)(n+2)(n+3)$$

№ 15. Першою цифрою (зліва) може бути одна з цифр 1, 2, 3; другою — одна з трьох цифр, які залишилися; третьою — одна з двох цифр, що залишилися, тому кількість чотирицифрових чисел, утворених з цифр 0; 1; 2; 3 без повторень, становить $n = 3 \cdot P_3 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

№ 16. Оскільки $n! = 5040$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = 5040$, то послідовно помноживши $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, одержимо 5040, отже, $7! = 5040$. Таким чином, слід узяти 7 елементів.

2. Фронтальна бесіда за запитаннями 11—13 із «Запитання і завдання для повторення» розділу XII.

II. Сприймання і усвідомлення поняття розміщення без повторень, формули числа розміщень з n елементів по m елементів.

На попередньому уроці було з'ясовано, скільки n -елементних упорядкованих множин можна утворити з усіх n елементів деякої множини.

А скільки m -елементних упорядкованих підмножин можна утворити з n різних елементів, якщо $n \geq m$? Такі упорядковані підмножини називають розміщеннями з n елементів по m елементів.

Будь-яка впорядкована підмножина з m елементів даної множини, яка містить n елементів, де $m \leq n$ називається **розміщенням з n елементів по m елементів**.

Число розміщень з n елементів по m позначають символом A_n^m .

Розглянемо множину $\{a, b, c\}$ і випишемо розміщення з елементів даної множини по два:

$$ab, ba, ac, ca, bc, cb.$$

$$\text{Отже, } A_3^2 = 6.$$

Знайдемо значення A_n^m .

Нехай маємо множину, яка містить n елементів. Перший елемент m -елементної підмножини можна вибрати n способами; другий елемент — $(n - 1)$ способами; третій елемент — $(n - 2)$ способами; ... m -ий елемент — $(n - m + 1)$ способами.

Отже,

$$A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - m + 1), \quad A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

тобто число розміщень з n елементів по m дорівнює добутку m послідовних натуральних чисел, найбільше з яких n .

Якщо $n = m$, то маємо $A_n^m = P_n$ тобто перестановка — окремий випадок розміщення.

Виконання вправ

1. Випишіть усі розміщення із елементів множини $\{a, b, c, d\}$ по два.

Відповідь: $ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc$.

2. Обчисліть: а) A_6^3 ; б) A_9^2 ; в) A_{10}^4 ; г) A_6^5 .

Відповіді: а) 120; б) 72; в) 5040; г) 720.

3. Скількома способами можна розсадити 4 учнів на 25 місцях?

Відповідь: $A_{25}^4 = 303\,600$.

4. Учневі треба скласти 4 екзамени на протязі 8 днів. Скількома способами це можна зробити.

Відповідь: $A_8^4 = 1680$.

5. Скільки існує всього семицифрових телефонних номерів, в кожному із яких жодна цифра не повторюється.

Відповідь: $A_{10}^7 = 604\,800$.

6. Скільки існує двоцифрових чисел, в яких цифра десятків і цифра одиниць різні і непарні.

Відповідь: $A_5^2 = 20$.

7. Із скількох різних предметів можна скласти 210 різних розміщень по два елементи в кожному?

Відповідь: 15.

8. Знайдіть n , якщо $A_n^5 = 18 \cdot A_{n-2}^4$.

Відповідь: 9 або 10.

9. Доведіть: а) $A_m^n = m \cdot A_{m-1}^{n-1}$; б) $A_n^{n-1} = P_n$; в) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

10. Розв'яжіть рівняння: а) $A_x^2 = 90$; б) $A_y^2 = 42$; в) $A_x^3 = 56x$.

Відповіді: а) 10; б) 7; в) 9.

III. Підведення підсумків уроку.

IV. Домашнє завдання.

Розділ XII § 2 (2). Запитання і завдання до розділу XII №№ 15—17.

Вправи №№ 17, 22.