УРОК 35

Тема уроку: Упорядковані множини. Перестановки.

Мета уроку: Познайомити учнів з перестановками без повторень, формулою числа перестановок без повторення. Формування умінь знаходити число перестановок із n елементів.

І. Перевірка домашнього завдання.

1. Фронтальна бесіда за запитаннями №№ 1-8 із «Запитання і завдання для повторення» розділу XI.

2. Колективне виконання вправ.

1) Виконати дії над комплексними числами:

а) $\frac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$; б) $\frac{2-3i}{2+i}+\frac{2+3i}{2-i}$.

2) Розв'язати рівняння:

а) $16x^2 - 32x + 17 = 0$; б) $x^2 - 6x + 11 = 0$.

Відповідь: 1) а) $0{,}8 + 4{,}4i$; б) 0,4. 2) а) $x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{4}i$; б) $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}\,i$.

ІІ. Мотивація навчальної діяльності.

Представникам різних професій доводиться розв'язувати задачі, в яких з деякої множини об'єктів потрібно вибирати елементи, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці елементи в певному порядку. Так керівнику цеху потрібно розподілити кілька видів робіт між працівниками, агроному — розмістити посіви сільськогосподарських культур на кількох полях, хіміку — розглянути можливі зв'язки між атомами і молекулами тощо. Оскільки в таких задачах йде мова про комбінування об'єктів, їх називають комбінаторними задачами, а розділ математики, в якому вивчаються питання про те, скільки різних комбінацій, що відповідають тим чи іншим умовам можна скласти із заданих об'єктів, називається комбінаторикою.

В наш час комбінаторні задачі приходиться розв'язувати фізикам, хімікам, біологам, економістам, спеціалістам самих різних професій.

ІІІ. Сприймання і усвідомлення поняття перестановки, формули числа перестановок (без повторення) з *n* елементів.

Коли ми говорили про множину, то порядок розміщення елементів в множині не враховувався. Нерідко розглядають і впорядковані множини.

Будь-яка впорядкована множина, яка складається з n елементів, називається *перестановкою* з n елементів і позначається P_n.

Таким чином, перестановки з n елементів відрізняються між собою лише порядком елементів.

Два елементи a і b можна упорядкувати двома способами: ab і ba. Це дві перестановки з елементів a і b. Отже, $P_2 = 2$.

Щоб утворити перестановки з трьох елементів a, b, c можна третій елемент с помістити попереду пари ab, посередині пари ab та вкінці пари ab:

$$cab,\ acb,\ abc.$$

Точно так із пари ba можна одержати:

$$cba,\ bca,\ bac.$$

Отже, для трьох елементів існує 2 · 3 = 6 способів розташування по порядку, число перестановок з трьох елементів дорівнює 6. $P_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

Нехай маємо k елементів, із яких складені всі можливі P_k перестановки. Візьмемо одну із них: $a_1a_2a_3...a_k$. Добавимо ще один $(k + 1)$-й елемент. Його можна помістити:

1) перед першим елементом a_1;

2) перед другим елементом a_2;

3) перед третім елементом a_3;

………………………………………

k) перед k-им елементом a_k;

(k + 1) в кінці всіх елементів, тобто, всього $k + 1$ способом.

Отже, кількість перестановок із $k + 1$ елементів в $(k + 1)$ раз більша, ніж число перестановок із k елементів, тобто,

$$P_{k+1} = P_k \cdot (k+1).$$

Отже,

$P_1 = 1$;

$P_2 = P_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$;

$P_3 = P_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

$P_4 = P_3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;

$P_5 = P_4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$;

……………………………

$P_k = P_{k-1} \cdot k = 1\text{-}2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k$;

$P_{k+1}=P_k \cdot (k+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k \cdot (k+1)$.

Добуток натуральних чисел від 1 до даного натурального числа η називається факторіалом числа n і позначається $n!$ В таблиці 14 наведено значення факторіала для значень n від 1 до 10.

Таблиця 14

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800

Число перестановок з n елементів дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n, тобто $n!$ (читають: єн факторіалів).

$$\boxed{P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!}$$

Задача. Скількома способами можна розставити на майданчику 6 волейболістів?

Розв'язання

$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Виконання вправ ______________________________

1. Запишіть всі перестановки елементів множини {△, □, ○}.

2. Обчислить:

а) 8!+9!; б) 9!-8!; в) $\frac{100!}{99!}$; г) $\frac{6!-5!}{120}$.

3. Скоротіть дріб:

а) $\frac{k!}{(k-1)!}$; б) $\frac{(k-2)!}{k!}$; в) $\frac{(k-1)!}{(k-3)!}$; г) $\frac{(k+1)!}{k+1}$.

4. Виконайте дії:

а) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; б) $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$; б) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$.

6. Скільки елементів повинна містити множина, щоб число всіх перестановок було:

а) не більше 100; б) не менше 1000.

7. Скількома способами можна скласти список із 9 прізвищ?

8. Скількома способами можна розкласти вісім різних листів у вісім різних конвертів, якщо в кожний конверт кладеться лише один лист?

9. Скільки п'ятицифрових чисел можна написати цифрами 5, 6, 7, 8, 9 так, щоб усі цифри кожного числа були різними?

10. Із цифр 0, 1, 2, 3, 4 складені всі можливі п'ятизначні числа так, що в кожному числі цифри не повторюються. Скільки одержали чисел?

11. Скільки всього шестизначних парних чисел можна скласти із цифр 1, 3, 4, 5, 7, 9, якщо в кожному із цих чисел жодна цифра не повторюється?

12. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складено всі можливі п'ятизначні числа без повторення цифр. Скільки серед цих п'ятизначних чисел таких, які:

а) починаються цифрою 5;
б) не починаються з цифри 3;
в) починаються з 53;
г) не починається з 543.

Відповіді: 1. △□○; △○□; ○△□; ○□△; □○△; □△○.
2. а) 403 200; б) 322 560; в) 100; г) 5.
3. а) *k;* б) $\frac{1}{k^2 - k}$; в) *(k - 2)(k* - 1); г) k!.
5. а)7; б)5.
6. а) не більше 4; б) не менше 7.
7. 9! = 362 880.
8. 40 320 = 8!
9. 5! = 120.
10. 96.
11. 5! = 120.
12. а) 24; б) 96; в) 6; г) 118.

IV. Підведення підсумків уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ XII § 2 (1). Запитання і завдання для повторення розділу XII №№ 11—14. Вправи №№ 13, 14, 15, 16.