УРОК 34

Тема уроку: Числові множини.

Мета уроку: Познайомити учнів з розширенням числових множин: числові множини N, Z, Q, *R* та множина комплексних чисел (С).

І. Перевірка домашнього завдання.

1. Фронтальна бесіда за запитаннями №№ 1—10 із «Запитання і завдання для повторення» розділу XII з використанням таблиці 12.

2. Перевірка виконання вправ №№ 1—4.

II. Систематизація відомостей про числові множини.

Множини можуть складатися з будь-яких об'єктів різної природи. Для математики особливо важливу роль відіграють множини складені із «математичних об'єктів» — чисел, геометричних фігур тощо. Дуже часто зустрічаються числові множини, тобто множини, елементами яких є числа. Згадаємо деякі множини чисел, з якими ви знайомилися в курсі математики.

1. Множина натуральних чисел тобто чисел, які виникають в процесі лічби предметів. Цю множину чисел позначають буквою *N:*

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.

В цій множині завжди можна виконати дії додавання і множення (віднімання і ділення не завжди можна виконати в множині натуральних чисел тобто результат віднімання і ділення двох натуральних чисел не завжди є натуральним числом).

2. Об'єднання натуральних чисел, чисел протилежних до натуральних і числа 0 утворює множину цілих чисел, яку позначають буквою *Z:*

$Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$.

В цій множині завжди можна виконати дії додавання, віднімання та множення. Проте частка двох цілих чисел не завжди є числом цілим.

3. Множина раціональних чисел (її позначають буквою Q) — це множина чисел, які можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z, n \in N$

$$Q = \{x: x = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}.$$

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного дробу. Наприклад $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)$. В множині раціональних чисел завжди виконуються дії додавання, віднімання, множення, ділення (крім ділення на 0). Проте, квадратний корінь з раціонального числа не завжди є раціональним числом. Наприклад: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ і т. д.

4. Числа, які не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z, n \in N$ (або числа, які подаються у вигляді нескінченного неперіодичного дробу, наприклад $\pi = 3{,}1415926...$), утворюють множину ірраціональних чисел.

Об'єднання раціональних і ірраціональних чисел утворює множину дійсних чисел, яку позначають буквою R.

У множині дійсних чисел завжди можна виконати дії: додавання, віднімання, множення, ділення (крім ділення на 0), добування квадратного кореня з невід'ємного числа.

Згадаємо деякі підмножини множини дійсних чисел, які часто ми використовуємо на уроках математики (таблиця 13).

Таблиця 13

Назва	Позначення	Зображення	Запис у вигляді нерівності
1	2	3	4
Числова пряма R	$(-\infty; +\infty)$, R	0 1 x	$-\infty < x < +\infty$
Замкнутий проміжок (відрізок)	$[a; b]$	a b x	$a \le x \le$ b
1	2	3	4
Відкритий проміжок (інтервал)	$(a; b)$	a b x	$a < x < b$
Напіввідкритий проміжок	$[a; b)$	a b x	$a \le x < b$
	$(a; b]$	a b x	$a < x \le b$
Нескінченний проміжок (промінь)	$(-\infty; a)$	a x	$x < a$
	$(-\infty; a]$	a x	$x \le a$
	$(a; +\infty)$	a x	$x > a$
	$[a; +\infty)$	a x	$x \ge a$

На рисунку в вигляді діаграми Ейлера подано співвідношення між числовими множинами: $N \subset Z \subset$; $Q \subset R$ (рис. 127).

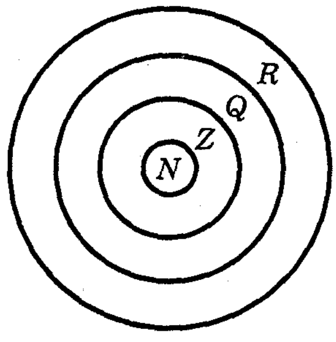

Рис. 127

<u>Виконання вправ</u>

1. Знайдіть переріз і об'єднання множин:

а) N ∩ Q; б) N U Q; в) R ∩ Z; г) R U Z; д) N ∩ Z.

2. Для даних множин A і B знайдіть A U B та A ∩ B.

а) A = [0; 5], B = (1; 6); б)A = (-1; 0], B = [0; 2);
в) A = (- ∞ ; 0), B = [0; 6); г) A = (-1; 0), B = [0; 9).

3. Для даних множин A, B, C знайдіть A ∩ B ∩ C та AUBUC.

а) A = [-2; 2], B = (- ∞ ; 0), C = [0; 5);
б) A = (2; 10), B = (3; 9), C = (4; 8);
в) A = (-5; 8), B = (-2; 10), C = (0; 13);
г) A = (- ∞ ; 4], B = [4; + ∞), C = (0; 4).

III. Сприймання і усвідомлення матеріалу про комплексі числа.

Розв'язування багатьох задач математики, фізики зводиться до розв'язування алгебраїчних рівнянь. Тому природне бажання зробити ці рівняння розв'язуючими, що в свою чергу приводить до розширення поняття числа. Наприклад, для того щоб будь-яке рівняння $x + a = b$ мало корені, додатних чисел недостатньо і тому виникла потреба ввести від'ємні числа і нуль.

Щоб будь-яке квадратне рівняння мало корені приходиться розширювати множину дійсних чисел, добавляючи до неї нові числа. Ці нові числа разом з дійсними утворюють множину, яку називають множиною комплексних чисел і позначають буквою *C.* Якщо введені комплексні числа, то рівняння $x^2 = -1$ повинно мати корінь. Цей корінь позначають буквою i та називають уявною одиницею. Отже, i — це таке комплексне число, що $i^2 = -1$.

Комплексними числами називають вирази виду $a + bi,$ де a і b — дійсні числа, i — таке комплексне число, що $i^2 = -1$.

Число α називається дійсною частиною комплексного числа $a + bi,$ число b — його уявною частиною.

Наприклад, комплексне число $2 + 3i$ має дійсну частину, яка дорівнює 2, а уявна частина дорівнює 3.

Будь-яке дійсне число можна подати у вигляді комплексного числа з уявною частиною рівною 0. Наприклад:

$\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$; $-5 = -5 + 0i$ і т. д.

Два комплексних числа $a + bi$ та $c + di$ називаються рівними, якщо $a = c$ та $b = d,$ тобто, якщо рівні їх дійсні і уявні частини.

Наприклад, $\frac{1}{2} + \sqrt{9}\,i = \frac{2}{4} + 3i$, оскільки $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ і $\sqrt{9} = 3$.

Арифметичні дії над комплексними числами визначаються так, щоб всі властивості цих дій були такими ж, як і для дійсних чисел (переставний і сполучний закони додавання і множення, розподільний закон множення та ін.).

Тому дії над комплексними числами $a + bi$ виконуються так, як і дії над многочленами, вважаючи, що $i^2 = -1$.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$
$$\frac{(a+bi)}{(c+di)} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Наприклад. Виконайте дії:

1) $(3 - 5i) + (2 + i) = 3 - 5i + 2 + i = (3 + 2) + (-5i + i) = 5 - 4i;$
2) $(3 - 5i) - (2 + i) = 3 - 5i - 2 - i = (3 - 2) + (-5i - i) = 1 - 6i;$

3) $(4 + 7i)(2 – i) = 8 + 14i – 4i – 7i^2 = 8 + 14i – 4i + 7 = - (8+7)+(14i–4i)–15+ 10i;$

4) $\frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{4+12i+9i^2}{4-(3i)^2} = \frac{4+12i-9}{4+9} = \frac{-5+12i}{13} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i.$

Використовуючи рівність $i^2 = –1$, квадратні корені з від ємних чисел прийнято записувати так: $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-4} = i\cdot\sqrt{4} = 2i$ і т. д. Отже, $\sqrt{a}$ визначений для будь-якого дійсного числа a (додатного, від'ємного і нуля). Тому квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c — дійсні числа, $a \neq 0$ у випадку $D < O$ має два корені в множині комплексних чисел, які знаходяться за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Розв'язання

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

Виконання вправ

1. Назвіть дійсну і уявну частини комплексних чисел.

а) $5 + 6i$; б) $2i - 3$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$; г) $\sqrt{3}\,i$.

2. Запишіть комплексні числа, у яких дійсна і уявна частини відповідно дорівнюють: а) 2 і 3; б) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{2}$; в) 0 і $\sqrt{2}$; г) - $\sqrt{3}$ і 0.

3. Знайдіть суму комплексних чисел:

а) $(3 + 5i) + (2 + 3i)$; б) $(5 – 3i) + (2 – 5i)$;

в) $(4 + 7i) + (2 – i)$; г) $(-2 + i) + (7- 3i)$.

4. Знайдіть різницю комплексних чисел:

а) $(3 + i) - (2 + 3i)$; б) $(2 – 3i) - (2 + i)$;

в) $(1 + 3i) - (-3 + i)$; г) $(-4 + 3i) - (4 - 3i)$.

5. Знайдіть добуток комплексних чисел:

а) $(2 + 3i)\cdot(3 + i)$; б) $(3 – 5i)\cdot(2 + i)$;

в) $(4 + i) \cdot (-5 + i)$; г) $(1 + i) \cdot (-1 + 2i)$.

6. Знайдіть частку комплексних чисел:

а) $\frac{1+i}{1-i}$; б) $\frac{2+i}{3-4i}$; в) $\frac{1+2i}{3-2i}$; г) $\frac{i}{i+1}$

7. Розв'яжіть рівняння.

а) $z^2 – 4z + 5 = 0$; б) $z^2 + 42z+ 13 = 0$;

в) $z^2 – 8z + 41 = 0$; г) $4z^2 + 4z + 5 = 0$.

IV. Підведення підсумків уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ XI §1,2. Запитання і завдання для повторення до розділу XI №№1—8. Вправи: № 1 (1, 2), № 2 (1—4), № 6 (1, 2).