

УРОК 33

Тема уроку: Множини. Операції над множинами.

Мета уроку: Формування знань учнів про множину та її елементи, порожню множину, способи задання множин та про операції над множинами: об'єднання, переріз, різниця множин.

I. Аналіз контрольної роботи.

II. Сприймання матеріалу про множини (підмножини).

Під множиною в математиці розуміють зібрання, сукупність будь-яких предметів, об'єктів, об'єднаних між собою деякою загальною для них усіх ознакою. Множина, як математичне поняття, не має означення. Це первинне поняття. Зміст його можна пояснити на різних прикладах. Так, можна говорити про множину учнів вашого класу, про множину книг в бібліотеці, про множину всіх людей на Землі тощо.

Коли в математиці говорять про множину, то об'єднують деякі предмети чи поняття в одне ціле — множину, що складається з цих предметів. Засновник теорії множин Георг Кантор (1845— 1918) виразив це такими словами: «Множина є об'єднання об'єктів, що мислиться як єдине».

Предмети (об'єкти), з яких складається множина, називаються її елементами. Для позначення множин, застосовують великі букви A, B, C, \dots , для позначення елементів — малі a, b, c, \dots

Той факт, що елемент a є елементом множини A , записують так: $a \in A$ (читається: a є елементом множини A , або a належить A , або a міститься в A , або A містить a). Якщо елемент x не є елементом множини A , то це записується так: $x \notin A$ (читається: x не є елементом множини A , або x не належить A , або x не міститься в A , або A не містить x).

Наприклад, якщо A — множина дільників числа 30, то $5 \in A, 10 \in A, 7 \notin A, 12 \notin A$ тощо.

Множину інколи можна задати перерахуванням її елементів. Наприклад, множина країн на земній кулі задається їх списком в географічному атласі, множина учнів вашого класу — їх списком в класному журналі. Якщо множину задано списком, то вживають фігурні дужки, в які вміщують назви всіх елементів множини, розділеними комами. Наприклад, якщо A — множина дільників числа 30, то $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$. Якщо B — множина букв слова «клас», то $B = \{к, л, а, с\}$.

Не всі множини можна задати списком. Якщо множина містить нескінченно багато елементів, то таку множину не можна задати переліченням її елементів. Множина вважається заданою, якщо вказана властивість, яку мають всі її елементи і не мають цю властивість інші об'єкти. Така властивість називається характеристичною властивістю множини.

Множину елементів, що мають дану характеристичну властивість позначають так: пишуть фігурні дужки, в них — позначення елемента множини, після нього — двокрапку, а потім — характеристичну властивість.

Наприклад, запис $A = \{x : -3 < x < 4\}$ означає, що множина A складається із всіх чисел x , що задовольняють нерівності $-3 < x < 4$.

Множина, що має певну кількість елементів (існує число, що виражає

кількість елементів даної множини) називається скінченною. Якщо множина має нескінченну кількість елементів, її називають нескінченною множиною.

Множину, яка не має жодного елемента, називають порожньою. Наприклад, множина точок перетину двох паралельних прямих; множина квадратних рівнянь, що мають більше двох різних коренів.

Порожню множину позначають так: \emptyset .

Якщо кожен елемент множини A міститься у множині B , то множина A називається підмножиною множини B . Це записується так: $A \subset B$ (читається: A є підмножиною B , або A включається до B , або A міститься в B , або B включає в себе A , або B містить A).

Наприклад: множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів школи; множина мешканців Харкова є підмножиною мешканців України; множина зірок нашої Галактики є підмножиною множини всіх зірок всесвіту.

Кожна непорожня множина A має хоча б дві підмножини: порожню множину \emptyset і саму множину A .

Якщо $A \subset B$ то наочно це зображають за допомогою діаграми Ейлера (рис. 123). Дві множини A і B називаються рівними, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Це записується так: $A = B$.

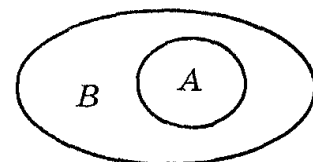


Рис. 123

Виконання вправ

1. Як називають множину:

- а) квітів, які стоять у вазі;
- б) артистів, які працюють в одному театрі;
- в) корів, що пасуться на галявині;
- г) точок земної поверхні, рівновіддалених від Північного полюсу?
- д) точок земної поверхні, рівновіддалених від Північного і Південного полюсів?

2. Нехай A – множина коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$. Які із поданих записів вірні?

- а) $-5 \in A$; б) $6 \notin A$; в) $2 \in A$; г) $3 \notin A$.

3. Задайте переліченням елементів множини:

- а) A — множину голосних букв українського алфавіту;
- б) B — множину коренів рівняння $x^4 - 4x^2 = 0$;
- в) C — множину простих парних чисел;
- г) D — множину пір року.

4. Задайте кілька елементів кожної множини:

- а) $A = \{x : x = 2m, \text{ де } m \text{ — ціле число}\}$;
- б) $B = \{x : x = 2n + 1, \text{ де } n \text{ — ціле число}\}$;
- в) $C = \{x : 0 < x < 1\}$.

5. Перелічіть елементи таких множин:

- а) $F = \{x : x \in \text{учнями вашого класу, які зараз відсутні}\}$;
- б) $H = \{x : (x - 2)(x + 2) = 0\}$;
- в) $K = \{x : x^2 - 8x + 15 = 0\}$.

6. Вкажіть серед вказаних нижче множин порожню:

- а) множина коренів рівняння $x^2 - 4 = 0$;
- б) множина коренів рівняння $x = x + 2$;
- в) множина коренів рівняння $x + 1 = 1 + x$;

г) множина кіл, в яких діаметр менший від радіуса.

7. Задано множини:

а) A — множина учнів вашого класу;

б) B — множина учнів вашої школи;

в) C — множина учнів України;

г) D — множина учнів країн земної кулі. Випишіть букви, що позначають вказані множини, в такому порядку, що кожна наступна буква позначала підмножину попередньої множини.

8. Задано множини:

а) множина A всіх трапецій;

б) множина B всіх прямокутників;

в) множина C всіх чотирикутників;

г) множина D всіх квадратів;

д) множина H всіх паралелограмів;

є) множина F всіх багатокутників.

Запишіть за допомогою знаку \subset ці множини в такому порядку, що кожна наступна множина була б підмножиною попередньої.

9. Зобразіть за допомогою діаграми Ейлера: якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

10. Доведіть, що, якщо $A \subset B$, а $B \subset C$, то $A \subset C$.

III. Сприймання і усвідомлення матеріалу про операції над множинами.

Переріз множин

Перерізом множин A і B називається множина, яка містить усі спільні елементи множин A і B , і тільки їх.

Переріз множин A і B позначають так: $A \cap B$. За допомогою діаграми Ейлера можна зобразити переріз множин A і B (рис. 124). Розглянемо приклади:

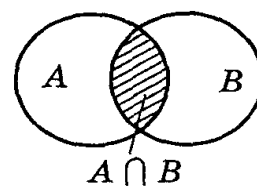


Рис. 124

а) Якщо $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, m, n, p\}$, то $A \cap B = \{a, c\}$.

б) Якщо A — множина усіх прямокутників, B — множина усіх ромбів, C — множина всіх квадратів, то $C = A \cap B$.

Виконання вправ

1. Дано: $A = \{a, b, c, 1, 3\}$, $B = \{b, d, \bar{b}, 3\}$, $C = \{b, 1, 6\}$. Знайдіть:

а) $A \cap B$; б) $A \cap C$; в) $B \cap C$; г) $A \cap B \cap C$.

2. Дано: $A = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

Знайдіть: $A \cap B$.

3. Доведіть: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

4. Доведіть, якщо $B \subset A$, то $A \cap B = B$.

5. Доведіть: а) $A \cap A = A$; б) $A \cap \emptyset = \emptyset$; в) $A \cap B = B \cap A$.

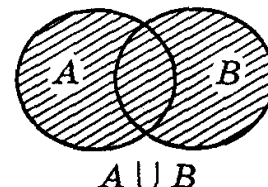


Рис. 125

Об'єднання множин

Об'єднанням множин A і B називається множина, яка складається з усіх елементів, які містяться хоч в одній з двох множин A , B і тільки їх.

Об'єднання множин A і B позначається так:

$A \cup B$. За допомогою діаграми Ейлера можна зобразити об'єднання множин A і B (рис. 125).

Розглянемо приклади.

а) Якщо $A = \{a, b, c, d\}$, то $B = \{a, c, m, n, p\}$, то $A \cup B = \{a, b, c, d, m, n, p\}$.

б) Якщо A — множина усіх прямокутників, B — множина усіх квадратів, то $A \cup B = A$.

Виконання вправ

1. Дано: $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 4\}$. Знайдіть:

а) $A \cup B$; б) $A \cup C$; в) $B \cup C$; г) $A \cup B \cup C$.

2. Дано: $A = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Знайдіть $A \cup B$.

3. Доведіть:

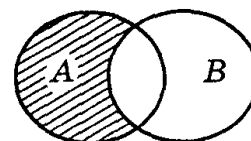
а) $A \cup A = A$; б) $A \cup \emptyset = A$; в) $A \cup B = B \cup A$; г) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

4. Доведіть: якщо $B \subset A$, то $A \cup B = A$.

Різниця множин

Різницею множин A і B називається множина всіх таких елементів множини A , які не містяться у множині B .

Різниця множин A і B позначається так: $A \setminus B$. За допомогою діаграми Ейлера можна зобразити різницю множин A і B (рис. 126).



$A \setminus B$

Рис. 126

Розглянемо приклади.

а) Якщо $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, m, n, p\}$, то $A \setminus B = \{b, d\}$, $B \setminus A = \{m, n, p\}$.

б) Якщо A — множина учнів вашого класу, B — множина дівчаток вашого класу, C — множина хлопчиків вашого класу, то $A \setminus B = C$, $A \setminus C = B$. У випадку, якщо B — частина множини A ($B \subset A$), то $A \setminus B$ називається доповненням до B у множині A і позначають $C_A B$.

Виконання вправ

1. Дано: $M = \{a, b, c, d\}$, $N = \{b, d\}$. Знайдіть:

а) $M \setminus N$; б) $N \setminus M$; в) $(M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.

2. Доведіть: а) $A \setminus A = \emptyset$; б) $A \setminus \emptyset = A$.

3. Знайдіть доповнення до множини всіх тупокутних трикутників у множині усіх трикутників.

IV. Підведення підсумків уроку.

Бесіда за №№ 1—10 із Запитання і завдання для повторення розділу XII з використанням таблиці 12.

V. Домашнє завдання.

Розділ XII § 1. Запитання і завдання для повторення розділу XII №№ 1—10. Вправи №№ 1, 2, 3, 4.

Множина і операції над ними

