

УРОК 21

Тема уроку: Первісна. Таблиця первісних. Невизначений інтеграл.

Мета уроку: Формування поняття первісної функції та поняття невизначеного інтегралу, знання таблиці первісних.

I. Аналіз контрольної роботи.

II. Сприймання і усвідомлення поняття первісної.

При вивченні теми «Похідна» ми розв'язували задачу про знаходження швидкості прямолінійного руху по заданому закону зміни координати $s(t)$ матеріальної точки. Миттєва швидкість $v(t)$ дорівнює похідній функції $s(t)$, тобто $v(t) = s'(t)$.

У практиці зустрічається обернена задача: по заданій швидкості $v(t)$ руху точки знайти пройдений нею шлях $s(t)$, тобто знайти таку функцію $s(t)$, похідна якої дорівнює $v(t)$. Функцію $s(t)$ таку, що $s'(t) = v(t)$, називають первісною

функції $v(t)$. Наприклад, якщо $v(t) = gt$, то $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ є первісною функції $v(t)$,

$$s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2} \right)' = \frac{g \cdot 2t}{2} = gt = v(t)$$

оскільки

Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку виконується рівність: $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функція $F(x) = \sin x$ є первісною функції $f(x) = \cos x$ для $x \in \mathbb{R}$,

бо $(\sin x)' = \cos x$; функція $F(x) = \operatorname{tg} x$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, бо

$$F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = f(x) \text{ для всіх } x, \text{ крім } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Виконання вправ

Покажіть, що функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ для вказаних значень x :

1. $F(x) = kx, f(x) = k, x \in \mathbb{R}$.

2. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, f(x) = x^n, x \in (0; +\infty), n \neq -1$.

3. $F(x) = \ln|x|, f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

4. $F(x) = e^x, f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

5. $F(x) = \frac{a^x}{\ln a}, f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}$.

6. $F(x) = -\cos x, f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$.

7. $F(x) = -\operatorname{ctg} x, f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n$.

III. Сприймання і усвідомлення основної властивості первісної, поняття невизначеного інтеграла.

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$. Доведемо, що функції $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, $F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 5$ є первісними функції $f(x)$.

Дійсно,

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x) \quad F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 2\right)' = x^2 + 0 = x^2 = f(x)$$

$$F_3'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 5\right)' = x^2 - 0 = x^2 = f(x)$$

Взагалі будь-яка функція $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, де C — постійна, є первісною функції x^2 . Це випливає з того, що похідна постійної дорівнює нулю.

Цей приклад свідчить, що для заданої функції первісна визначається неоднозначно.

Теорема 1. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді для довільної постійної C функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$.

Доведення

Оскільки $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$.

Тоді $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$, а ця рівність означає, що $F(x) + C$ є первісною для функції $f(x)$.

Теорема 2. Нехай функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на деякому проміжку. Тоді будь-яка первісна для функції $f(x)$ на цьому проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — деяка стала (число).

Доведення

Нехай $F(x)$ і $F_1(x)$ — дві первісні однієї і тієї самої функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, $F_1'(x) = f(x)$. Похідна різниці $g(x) = F(x) - F_1(x)$ дорівнює нулю, оскільки $g'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Якщо $g'(x) = 0$ на деякому проміжку, то дотична до графіка функції $y = g(x)$ у кожній точці цього проміжку паралельна осі OX . Тому графіком функції $y = g(x)$ є пряма, яка паралельна осі OX , тобто $g(x) = C$, де C — деяка стала. Із рівностей $g(x) = C$, $g(x) = F_1(x) - F(x)$ випливає, що $F_1(x) - F(x) = C$, або $F_1(x) = F(x) + C$.

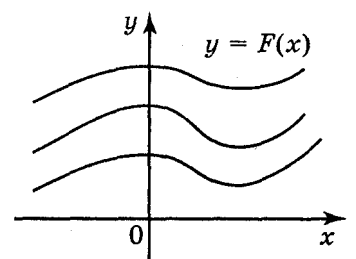


Рис. 87

Теорема 1 і 2 виражають основну властивість первісної.

Основній властивості первісної можна надати геометричного змісту: графіки будь-яких двох первісних для функції f одержуються один із одного паралельним перенесенням вздовж осі OY (рис. 87).

Нехай функція f має на деякому проміжку первісну. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку називають невизначеним інтегралом цієї

функції і позначають $\int f(x)dx$. Функцію $f(x)$ називають *підінтегральною*

функцією.

З доведених теорем випливає, що $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ — яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку, C — довільна стала (її називають сталою інтегрування). Наприклад, функція $\sin x$ є первісною для функції $\cos x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, тому можна записати, що

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

IV. Сприймання і усвідомлення таблиці первісних (таблиці невизначених інтегралів).

Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних (таблицю невизначених інтегралів) для функцій, похідні яких відомі (таблиця 9).

Таблиця 9 Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0 dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

V. Підведення підсумків уроку.

VI. Домашнє завдання.

Розділ ІХ § 1—2. Запитання і завдання для повторення розділу ІХ № 1—7.
Вправа № 1 (1—5).