

УРОК 54

Тема уроку: Основні властивості логарифмів.

Мета уроку: Вивчення основних властивостей логарифмів. Познакомити учнів з логарифмуванням і потенціюванням виразів.

I. Перевірка домашнього завдання.

1. Три учні відтворюють розв'язування вправ № 4, 6, 18.
2. Усне розв'язування вправ на обчислення логарифмів з використанням таблиці 22 для усних обчислень.

Таблиця 22

	1	2	3	4	5
1	$\log_2 8$	$\log_3 9$	$\log_4 64$	$\log_5 125$	$\log_6 36$
2	$\log_3 \frac{1}{9}$	$\log_2 \frac{1}{16}$	$\log_5 \sqrt{5}$	$\log_4 2$	$\log_9 3$
3	$\log_{\frac{1}{2}} 4$	$\log_{\frac{1}{3}} 27$	$\log_{\sqrt{3}} 3$	$\log_{\sqrt{3}} 1$	$\log_{81} 3$
4	$5^{\log_5 4}$	$2^{-\log_2 6}$	$2^{1+\log_2 3}$	$3^{\log_3 2} - 1$	$3^{\log_3 2-1}$
5	$3^{2\log_3 2}$	$5^{-\log_5 3}$	$2^{\log_2 3+\log_2 5}$	$7^{\log_7 14-\log_7 2}$	$\log_4 (3-\pi)$

3. Відповіді на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

II. Сприймання і усвідомлення основних властивостей логарифмів.

При виконанні перетворень виразів, які містять логарифми, при обчисленнях і при розв'язуванні рівнянь, нерівностей часто використовуються властивості логарифмів.

Для будь-яких $a > 0$, $a \neq 1$ і будь-яких додатних x і y виконуються рівності:

<ol style="list-style-type: none"> 1. $\log_a 1 = 0$; 2. $\log_a a = 1$; 3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; 4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; 5. $\log_a x^p = p \log_a x$ ($p \in R$); 6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$ ($p \in R$); 7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

Доведемо рівності 3—7. За основною логарифмічною тотожністю

$$a^{\log_a x} = x \quad (\text{I})$$

$$a^{\log_a y} = y \quad (\text{II})$$

Перемноживши рівності (I) і (II), одержуємо:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

звідси за означенням логарифма маємо

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Отже, **логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів.**

Розділивши рівності (I) і (II), одержуємо: $\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y},$

звідси за означенням логарифма маємо: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$

Отже, **логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.**

Піднісши ліву і праву частини рівності (I) до степеня з показником p ,

маємо: $x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \log_a x} \quad (\text{III})$

звідси за означенням логарифма маємо: $\log_a x^p = p \log_a x.$

Отже, **логарифм степеня дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.**

З рівності (III) маємо: $x^p (a^p)^{\log_a x}$, звідси за означенням логарифма маємо:

$$\log_{a^p} x^p = \log_a x, \text{ тоді } p \log_{a^p} x = \log_a x; \quad \log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x.$$

Формула 7 називається **формулою переходу від одної основи логарифма до другої основи.** Доведемо її.

За правилом логарифмування степеня (формула 5) та основною логарифмічною тотожністю одержуємо:

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x})$$

$$\text{звідси} \quad \log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$$

$$\text{або} \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

За допомогою формули 7 можна знаходити логарифми з довільною основою a , маючи таблиці логарифмів, складених для якої-небудь основи b . Найбільш вживаними є таблиці десяткових і натуральних логарифмів.

III. Осмислення основних властивостей логарифмів.

1. Розглянемо приклади використання формул 3-7. Обчислимо:

1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 (18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2;$

2) $\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1;$

3) $\log_6 \sqrt{3} = \log_6 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_6 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2};$

4) $\log_{125} 5 = \log_{125} 5 = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3};$

5) $\log_3 16 = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2 \cdot 1 = 2.$

2. Використовуючи калькулятор (або таблиці), обчислимо:

$$1) \log_3 2 = \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx \frac{0,301}{0,477} \approx 0,631;$$

$$2) \log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx \frac{0,693}{1,099} \approx 0,631.$$

3. Виконання вправ № 29, 30.

IV. Сприймання і усвідомлення логарифмування і потенціювання виразів.



В Дія знаходження логарифма числа (виразу) називається *логарифмуванням*.

Приклад. Прологарифмуйте вираз $y = \frac{a^2 b^2}{c^3}$.

Розв'язання

$$\lg y = \lg \frac{a^2 b^2}{c^3} = \lg (a^2 b^2) - \lg c^3 = \lg a^2 + \lg b^2 - \lg c^3 = 2 \lg a + 2 \lg b - 3 \lg c.$$

Дія, обернена до логарифмування, називається *потенціюванням*.



Потенціювання — знаходження числа (виразу) за його логарифмом.

Приклад. Пропотенціюйте вираз $\lg x = \frac{1}{2} \lg 5a - 3 \lg b + 4 \lg c$.

Розв'язання

$$\lg x = \frac{1}{2} \lg 5a - 3 \lg b + 4 \lg c; \quad \lg x = \lg (5a)^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 + \lg c^4;$$

$$\lg x = \lg \sqrt{5a} - \lg b^3 + \lg c^4; \quad \lg x = \lg (\sqrt{5a} \cdot c^4) - \lg b^3;$$

$$\lg x = \lg \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}; \quad x = \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}.$$

Виконання вправ № 24 (4), 31 (4).

V. Підведення підсумків уроку.

VI. Домашнє завдання.

Розділ V § 1. Запитання і завдання для повторення № 6—14.

Вправи № 24 (2), 27, 28, 31 (3).