УРОК 40

Тема *уроку.* Узагальнення поняття степеня.
Мета уроку: Формування поняття степеня з раціональним показником, степінь з ірраціональним показником.

I. Перевірка домашнього завдання.

1. Відповіді на запитання, що виникли в учнів при розв'язуванні домашнього завдання.
2. Колективне розв'язування нерівності $\sqrt{4x - x^2} < 4 - x$.

   Відповідь: $0 < x < 2$.

II. Повторення і систематизація знань учнів про степінь з натуральним і цілим показником.

Повторення і систематизацію знань учнів про степінь із натуральним і цілим показником рекомендується провести шляхом бесіди з використанням таблиці 17.

Питання до класу:

1. Що називається n-м степенем числа a, якщо $n \in N$? якщо $n = 1$? $n = 0$?
2. Що таке степінь, основа степеня, показник степеня?
3. Що називається n-м степенем числа a, якщо $n \in Z$?
4. Сформулюйте основні властивості степенів.

Таблиця 17

Степені	
з натуральним показником: $a^1 = a$ ($a \in R$) $a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a \quad n \in N, n > 2$	з цілим показником $a^0 = 1, a \neq 0$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0, n \in N$
Властивості $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$	

III. Формування поняття степеня з дробовим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником. Вводячи це поняття, хотілося би, щоб степінь з раціональним показником мав ті самі властивості, що й степінь із цілим показником. Зокрема, n-й степінь числа $a^{\frac{m}{n}}$ повинен дорівнювати a^m. Якщо ця властивість виконується, то $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$ – а це означає (за означенням кореня n-го степеня), що число $a^{\frac{m}{n}}$ повинно бути коренем n-го степеня із числа a^n.

!

Степенем $a^{\frac{m}{n}}$ числа $a > 0$ з раціональним показником $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$ ($n>1$) називається число $\sqrt[n]{a^m}$.

Отже, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь числа 0 визначений тільки для додатних показників;
за означенням ($0^r = 0$ для будь-якого *г* > 0.

<u>Виконання вправ</u>

1. Подайте вирази у вигляді степеня з раціональним показником:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{6}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{2}}$; г) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^2}}$.

Відповідь: а) $2^{\frac{1}{2}}$; б) $6^{\frac{1}{3}}$; в) $2^{-\frac{1}{7}}$; г) $x^{-\frac{2}{5}}$.

2. Подайте вирази у вигляді кореня із числа чи виразу:

а) $5^{\frac{2}{3}}$; б) $5\,x^{\frac{1}{3}}$; в) $6\,x^{-\frac{2}{3}}$; г) $3\,(x-y)^{-\frac{1}{2}}$.

Відповідь: а) $\sqrt[3]{25}$; б) $5\sqrt[3]{x}$; в) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$; г) $\dfrac{3}{\sqrt{x-y}}$.

3. Обчисліть:

а) $9^{\frac{1}{2}}$; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $8^{\frac{2}{3}}$; г) $81^{\frac{3}{4}}$.

Відповідь: а) 3; б) 3; в) 4; г) 27.

IV. Вивчення властивостей степенів з раціональним показником.

Для будь-яких раціональних чисел p і q і будь-яких додатних a і b справедливі рівності:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+qn};$$
$$a^p : a^q = a^{p-q};$$
$$(a^p)^q = a^{pq};$$
$$(ab)^p = a^p b^p;$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}}.$$

Для доведення цих властивостей треба скористатися означенням степеня з раціональним показником і властивостями коренів. Доведемо першу рівність: нехай $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{r}{s}$, тоді

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{nr}} = \sqrt[ns]{a^{ms} \cdot a^{rn}} = \sqrt[ns]{a^{ms+rn}} = a^{\frac{ms+rn}{ns}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} = a^{p+q}$$

Останні рівності доводяться аналогічно.

<u>Виконання вправ</u> <u>№ 99 (2), 100 (2), 101 (2), 103 (3, 4).</u>

V. Сприймання поняття про степінь з ірраціональним показником.

Розглянемо степінь $10^{\sqrt{2}}$ з ірраціональним показником $\sqrt{2}$. Ірраціональне число $\sqrt{2}$ можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Розглянемо послідовність наближень числа $\sqrt{2}$:

$$1 < \sqrt{2} < 2,$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5,$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42,$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415,$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143,$$
$$\ldots$$

За допомогою калькулятора знайдемо наближені значення степенів числа 10 з недостачею і надлишком, тоді матимемо:

$$10 = 10^1 < 10^{\sqrt{2}} < 10^2 = 100,$$
$$25{,}119 \approx 10^{1,4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,5} \approx 31{,}623,$$
$$25{,}704 \approx 10^{1,41} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,42} \approx 26{,}303,$$
$$25{,}942 \approx 10^{1,414} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,415} \approx 26{,}002,$$
$$25{,}953 \approx 10^{1,4142} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,4143} \approx 25{,}960,$$

Наведені значення з недостачею і надлишком наближаються до одного і того самого числа $10^{\sqrt{2}}$ = 25,9..., яке і прийнято вважати степенем числа 10 з показником $\sqrt{2}$.

Таким чином, ми розширили поняття степеня на будь-які дійсні показники, зберігаючи при цьому властивості степенів.

VI. Підведення підсумків уроку.

VII. Домашнє завдання.

Розділ III § 3 (1—3). Запитання і завдання для повторення до розділу III № 56—66. Вправи №№ 99 (1), 100 (1), 103 (1, 2).