УРОК 29

Тема уроку: Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Мета уроку: Формування умінь учнів розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності: tg $t > a$, $tgt < a$, ctg $t < a$, ctg $t > a$ ($tgt \geq a$, $tgt \leq a$, $ctg\ t \leq a$, ctg $t \geq a$).

І. Перевірка домашнього завдання.

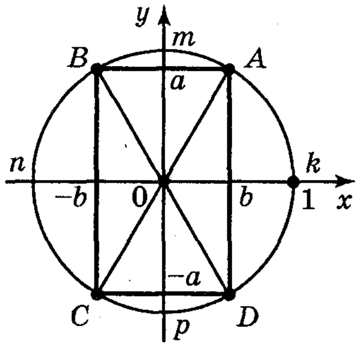

Рис. 130

1. Відповіді на запитання, які виникли в учнів у процесі виконання домашніх завдань.
2. Фронтальна бесіда з учнями з використанням рис. 130.

1) Яка дуга відповідає нерівностям: sin $t > a$; cos $t > b$; sin $t > - a$; cos $> - b$; sin $t < a$, $cos\ t < b$, sin $t < - a$, sin $t < - b$?

2) Розв'язком якої нерівності є дуга АmВ; АkD; СpD; СnВ?

3) Розв'яжіть нерівності: cos $t \geq 1$; sin $t > 5$; sin $t < 5$; sin $t < -1$; cos $t > \pi$; cos $t < \pi$; cos $t \geq 0$; cos $t \leq 0$; sin $t \geq 0$; sin $t \leq 0$.

ІІ. Сприймання і усвідомлення розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

На сьогоднішньому уроці ми продовжимо вчитися розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $tg\ t \leq 1$.

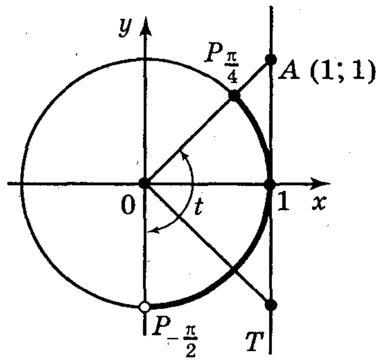

Рис. 131

Розв'язання

Побудуємо одиничне коло та лінію тангенсів (рис. 131). На осі тангенсів позначимо число 1. Якщо t є розв'язком нерівності, то ордината точки Т, рівна tg t, повинна бути не більша 1. Множина таких точок T — промінь AT. Множина точок P_t, що відповідають точкам променя АТ, — дуга $P_{-\frac{\pi}{2}}P_{\frac{\pi}{4}}$, яка на рисунку виділена. (Зверніть увагу: точка $P_{\frac{\pi}{4}}$ належить, а точка $P_{-\frac{\pi}{2}}$ не належить множині розв'язків). Отже, розв'язком нерівності будуть усі значення t із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$. Враховуючи, що період функції tg t дорівнює π, маємо розв'язок даної нерівності

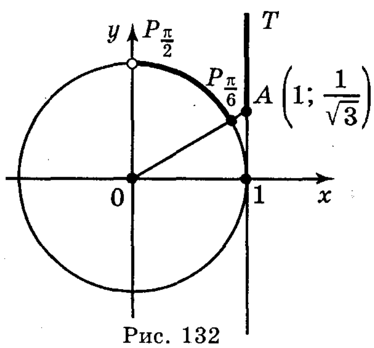

Рис. 132

$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in$ Z.

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, де $n \in$ Z.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність tg t $> \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання

На осі тангенсів (рис. 132) позначимо число $\frac{1}{\sqrt{3}}$ і множину значень тангенсів, не менших за $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (промінь *AT).* На одиничному колі множина точок, що відповідають кутам, тангенс яких не менший від $\frac{1}{\sqrt{3}}$, є дуга $P_{\frac{\pi}{6}}P_{\frac{\pi}{2}}$. Отже, розв'язком нерівності будуть усі значення t із проміжку $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$. Враховуючи періодичність, маємо: $\frac{\pi}{6}+\pi n \le t < \frac{\pi}{2}+\pi n$, де $n \in Z$.

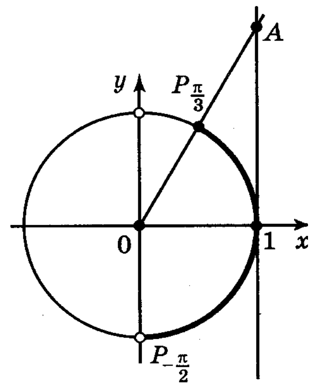

Рис. 133

Відповідь: $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, де n є Z.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність *ctgt* $\ge -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання

<u>1 спосіб.</u> Враховуючи, що ctg t = tg $\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$, маємо

ctg t = - tg $\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$, тоді маємо нерівність -tg $\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \ge -\frac{1}{\sqrt{3}}$ або tg $\left(t-\frac{\pi}{2}\right) \le \sqrt{3}$.

Розв'яжемо останню нерівність (рис. 133), маємо: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < t-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in$ Z; $\pi n < t \le \frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in$ Z.

Відповідь: $\left(\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, де $n \in Z$.

<u>2 спосіб.</u> На осі котангенсів позначимо число і множину (рис. 134) значень котангенсів, не менших за $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (промінь *AQ).* На одиничному колі множина точок, що відповідають кутам, котангенс яких не менший від $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, є дуга $P_0 P_{\frac{5\pi}{6}}$ Отже, розв'язки нерівності будуть усі значення t із проміжку $\left[0;\frac{5\pi}{6}\right)$.

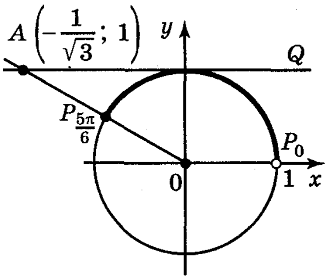

Рис. 134

Враховуючи періодичність, маємо: $\pi n < t \le \frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in$ Z.

Відповідь: $\left(\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, де $n \in Z$.

ІІІ. Формування умінь розв'язувати найпростіші нерівності.

1. Розв'яжіть нерівності: а) tg $x \geq -1$; б) tg $x < \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) tg $x \geq 2$; г) ctg $x > \sqrt{3}$.

Відповідь: а) $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

в) $\left[arctg 2 + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$; г) $\left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

IV. Підведення підсумків уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ II § 5. Запитання і завдання для повторення до розділу II № 24. Вправа № 3 (2, 4, 6, 8).