УРОК 28

Тема уроку: Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.
Мета уроку: Формування умінь учнів розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності: $\sin t > a$, $\sin t < a$, $\cos t > a$, $\cos t < a$ ($\sin t \geq a$, $\sin t \leq a$, $\cos t \geq a$, $\cos t \leq a$).

I. Перевірка домашнього завдання.

1. Два учні відтворюють розв'язування систем з домашнього завдання.

2. Колективне розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{3}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{4}. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{3}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{4}. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{2}, \\ \cos(x+y) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ x + y = 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

Тоді 1) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ x + y = 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k), \\ 2y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k), \end{cases}$ *де* $n, k \in Z$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi(n+k), \\ y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi(n-k), \end{cases} \text{ де } n, k \in Z$$

2) $\begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ x + y = 2\pi n, n \in Z. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k), \\ 2y = \frac{\pi}{3} + 2\pi(n-k), \end{cases}$ *де* $n, k \in Z$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi(n+k), \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi(n-k), \end{cases} \text{ де } n, k \in Z$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); -\frac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right)$, $n, k \in$ Z.

II. Сприймання і усвідомлення розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей.

Нерівність називається тригонометричною, якщо вона містить змінну тільки під знаком тригонометричної функції. Наприклад, $\sin 3x > 1$, $\cos x + \text{tg } x < 1$ — тригонометричні нерівності. Розв'язати тригонометричну нерівність означає знайти множину значень змінної, при яких нерівність виконується.

Розв'язування тригонометричних нерівностей зводиться до розв'язування нерівностей:

$\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$,

$\cos x > a$, $\cos x < a$, $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$,

$tg\, x > a$, $tg\, x < a$, $\text{tg}\, x \geq . a$, $tg\, x \leq a$,

які називаються найпростішими. Отже, мета сьогоднішнього уроку — навчитися розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності, використовуючи одиничне коло.

Розглянемо приклади.

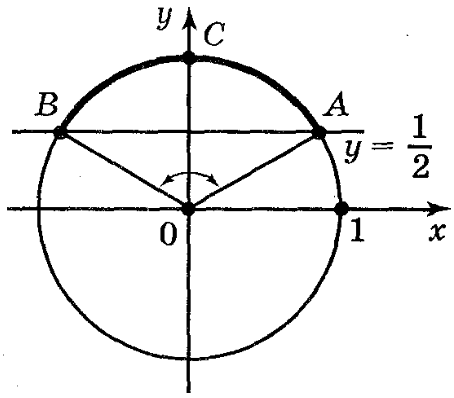

Рис. 126

1. Розв'яжіть нерівність $\sin t \geq \frac{1}{2}$.

Розв'язання

Будуємо одиничне коло (рис. 126) та пряму $y = \frac{1}{2}$, яка перетинає одиничне коло в точках A і *B.* Знаходимо на одиничному колі точки, значення ординат яких не менші $\frac{1}{2}$.

Цими точками є точки дуги *ACB,* де A = $P_{\frac{\pi}{6}}$, B = $P_{\frac{5\pi}{6}}$. Отже, розв'язком нерівності будуть усі значення t із проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$. Враховуючи, що період функції $\sin t$ дорівнює 2π, маємо розв'язок даної нерівності

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$

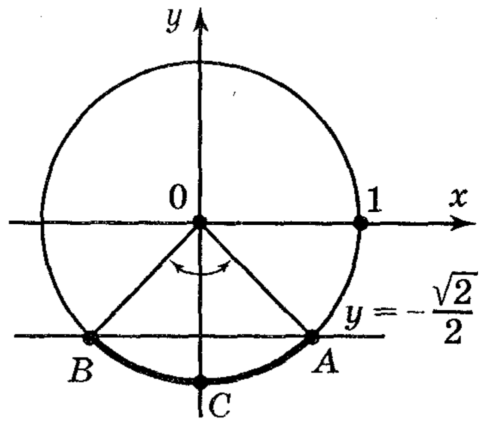

Рис. 127

2. Розв'язати нерівність $sin\ t \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання

Будуємо одиничне коло (рис. 127) та пряму $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, яка перетинає одиничне коло в точках

A і *B*. Точки дуги *ACB* мають значення *y,* не більші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, де A = $P_{-\frac{\pi}{4}}$, B = $P_{-\frac{3\pi}{4}}$. Отже, розв'язком нерівності будуть усі значення t з проміжку $\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right]$.

Враховуючи періодичність, маємо: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le t \le -\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

Відповідь: $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right], n\in Z$.

3. Розв'язати нерівність *cost* > $\frac{1}{2}$.

Розв'язання

Побудуємо одиничне коло (рис. 128) та пряму $x = \frac{1}{2}$, яка перетинає одиничне коло в точках *A* і *B*. Точки одиничного кола, абсциси яких більші за $\frac{1}{2}$, лежать на дузі AP_0B, де A = $P_{\frac{\pi}{3}}$, *B* = $P_{-\frac{\pi}{3}}$. Отже, розв'язком нерівності будуть усі значення *t* із проміжку $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$. Враховуючи періодичність, маємо:

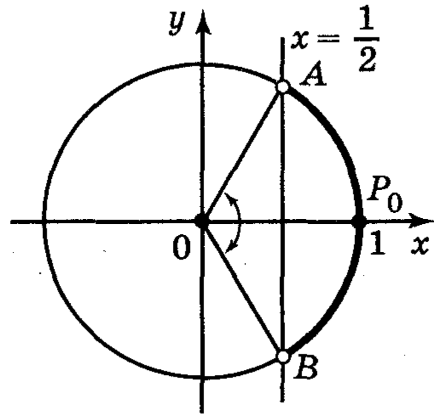

Рис. 128

$$-\frac{\pi}{3}+2\pi n < t < \frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$$

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z$

4. Розв'язати нерівність cos t < $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

Побудуємо одиничне коло (рис. 129) та пряму $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, яка перетинає одиничне коло в точках

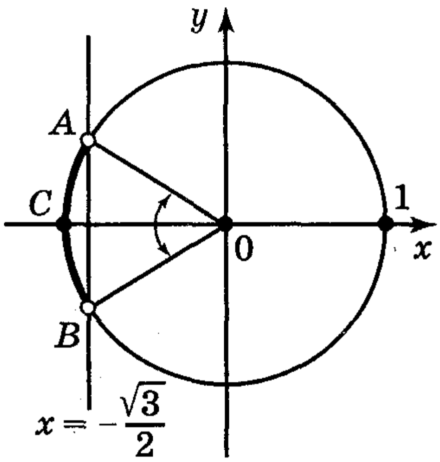

Рис. 129

А і В. Точки одиничного кола, абсциси яких менші за $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, лежать на дузі АСВ де A = $P_{\frac{5\pi}{6}}$, B = $P_{\frac{7\pi}{6}}$. Отже, розв'язком нерівності будуть усі значення t із проміжку $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right)$. Враховуючи періодичність, маємо:

$$\frac{5\pi}{6}+2\pi n<t<\frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$$

Відповідь: $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right), n\in Z$.

III. Формування умінь розв'язувати найпростіші нерівності.

1. Розв'яжіть нерівності:

а) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: а) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$;

б) $-\frac{4\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$;

в) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leq x\leq\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$;

г) $\frac{\pi}{6}+2\pi n\leq x\leq\frac{11\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $|\sin x|>\frac{1}{2}$; б) $|\cos x|>\frac{1}{2}$; в) $|\cos x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $|\sin x|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: а) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right), n\in Z$; б) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right), n\in Z$;

в) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right], n\in Z$; г) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right], n\in Z$.

IV. Підведення підсумків уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ II § 5 (до прикладу 3). Запитання і завдання для повторення до розділу II № 22—23. Вправа № 3 (1, 3, 5, 7).