

УРОК 27

Тема уроку: Розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Мета уроку: Познакомити учнів з окремими прийомами розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

I. Перевірка домашнього завдання.

- Чотири учні відтворюють розв'язування домашніх завдань: вправа № 2 (10; 18; 26; 38).
- Усне розв'язування тригонометричних рівнянь, використовуючи таблицю «Тригонометричні рівняння».

Таблиця 11

	1	2	3	4
1	$\sin x = 0$	$\cos x = 0$	$\operatorname{tg} x = 0$	$\operatorname{ctg} x = 0$
2	$\sin x = 1$	$\cos x = 1$	$\operatorname{tg} x = 1$	$\operatorname{ctg} x = -1$
3	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$
4	$\sin x = -\frac{1}{2}$	$\cos x = -\frac{1}{2}$	$2 \sin x \cos x = 1$	$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$
5	$\sin^2 x = 1$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg}^2 x = 1$	$\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 1$
6	$\sin x - \cos x = 0$	$\sin x + \cos x = 0$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 0$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

II. Повторення відомостей про методи розв'язування систем алгебраїчних рівнянь.

- Розв'яжіть систему рівнянь (методом додавання).

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \text{Відповідь: } (5; 3).$$

- Розв'яжіть систему рівнянь. $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \quad \text{Відповідь: } (1; 3), (3; 1).$

III. Сприймання і усвідомлення матеріалу про розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

Основні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь майже такі, як і методи розв'язування алгебраїчних систем.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = 1, & (1) \\ \sin x + \cos y = 0. & (2) \end{cases}$$

Розв'язання

Додавши і віднявши (1) і (2) рівняння, одержуємо

$$\begin{cases} 2 \sin x = 1, \\ 2 \cos y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \\ y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = \pi, \\ \cos x - \cos y = 1; \end{cases}$$

Розв'язання

З першого рівняння знаходимо $y = \pi - x$. Тоді

$$\cos x - \cos(\pi - x) = 1, \quad \cos x + \cos x = 1, \quad 2 \cos x = 1, \quad \cos x = \frac{1}{2},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Потім знаходимо:

$$y = \pi - \left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) = \pm \frac{\pi}{3} + (1 - 2n)\pi, n \in Z.$$

$$\text{Відповідь: } x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, y = \pm \frac{\pi}{3} + (1 - 2n)\pi, \text{ де } n \in Z.$$

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(x - y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(x - y) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \pi k, & k \in Z, \\ x - y = \pi n, & n \in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \pi(k + n), & n \in Z, k \in Z, \\ 2y = \pi(k - n), & n \in Z, k \in Z. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2}(k + n), & n, k \in Z, \\ y = \frac{\pi}{2}(k - n), & n, k \in Z. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } x = \frac{\pi}{2}(k + n), y = \frac{\pi}{2}(k - n), \text{ де } n, k \in Z.$$

IV. Формування умінь розв'язувати системи тригонометричних рівнянь.

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \cos x + \sin y = 0,5, \\ \cos x - \sin y = 0,5; \end{cases} \\
 \begin{cases} \cos x \cos y = 0,75, \\ \sin x \sin y = 0,25; \end{cases}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{в) } \begin{cases} \sin x - \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 2; \end{cases} \quad \text{г) }
 \end{array}$$

Відповіді: а) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, y_1 = \frac{\pi}{4} - 2\pi k, x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, y_2 = -\frac{\pi}{4} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, y = \pi n$ де $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$. в) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

г) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi(n+k), n, k \in \mathbb{Z}, y = -\frac{\pi}{6} + \pi(k-n), n, k \in \mathbb{Z}$.

V. Підведення підсумків уроку.

VI. Домашнє завдання.

Розв'язати системи рівнянь:

$$\begin{array}{l}
 \text{а) } \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \pi. \end{cases}
 \end{array}$$

Відповідь: а) $x = \frac{\pi}{2} - \pi n, y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

б) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi(1-k), k \in \mathbb{Z}$.