УРОК 25

Тема уроку: Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь.

Мета уроку: Формування умінь учнів розв'язувати однорідні тригонометричні рівняння.

I. Перевірка домашнього завдання.

1. Обговорення розв'язування вправи № 2 (6; 9; 11) за готовими розв'язаннями.
2. Розв'язування аналогічних вправ.

а) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$; б) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\cos 4x + \sin 2x = 0$; г) $\cos x\,(tg\,x - 1) = 0$.

Відповіді: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z$;
в) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

II. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

1) Розглянемо рівняння виду $a\sin x + b\cos x = 0$ (однорідне рівняння 1-го степеня), де a і b не дорівнюють нулю. Значення x, при яких $\cos x$ дорівнює нулю, не задовольняє даному рівнянню, бо тоді і $\sin x$ теж дорівнював би нулю, а $\cos x$ і $\sin x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю. Тому можна розділити обидві частини рівняння почленно на $\cos x$. Маємо:

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{b\cos x}{\cos x} = 0 \qquad a\,tg\,x + b = 0 \qquad tg\,x = -\frac{b}{a}.$$

$$x = -\,arctg\,\frac{b}{a} + \pi n,\ n \in Z.$$

Виконання вправ

Розв'яжіть рівняння.

1. а) $\sqrt{3}\,sinx + cosx = 0$; б) $16\sin x = 5\cos x$;
в) $2\cos 2x + 3\sin 2x = 0$; г) $\sin^2 x + \sin x\cos x = 0$.

Відповідь: а) $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; б) $arctg\frac{5}{16} + \pi n, n \in Z$; в) $-\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{2}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$;
г) $\pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

2. Рівняння виду $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ називається однорідним рівнянням 2-го степеня. Якщо числа a, b, c не дорівнюють нулю, то розділимо дане рівняння на $\cos^2 x$ (або на $\sin^2 x$). (У даному рівнянні $\cos^2 x \neq 0$, бо в супротивному випадку $\sin^2 x$ теж дорівнював би нулю, а $\cos x$ і $\sin x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю). Тоді

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$a\mathrm{tg}^2 x + b\mathrm{tg}x + c = 0.$$

Розв'язавши отримане, рівняння одержимо корені даного рівняння.

Виконання вправ

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$; б) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$;

в) $3\sin^2 x – 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$; г) $\sin^2 x – 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$.

Відповідь: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; б) $arctg\, 2 + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$;

в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\text{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$; г) $\text{arctg}\, 2 + \pi n$, $\text{arctg}\, 3 + \pi n$, $n \in Z$.

3. Рівняння виду

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + ... + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0$$

називається однорідним рівнянням п-го степеня відносно синуса і косинуса. Якщо жоден із коефіцієнтів a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0 не дорівнює нулю, то, розділивши обидві частини рівняння почленно на $\cos^n x$, одержимо рівняння n-го степеня відносно $\text{tg} x$. Якщо хоча б один із коефіцієнтів a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0 дорівнює нулю, то перш ніж виконувати ділення на $\cos^n x$, слід довести, що $\cos^n x \neq 0$, тобто, $\cos x \neq 0$.

Розглянемо приклад:

Розв'яжіть рівняння $\cos^2 x - 2 \cos x \sin x = 0$.

Ділити обидві частини на $\cos^2 x$ не можна, бо $\cos^2 x = 0$ є розв'язком даного рівняння. Це рівняння можна розв'язати:

<u>І спосіб</u> (винесення множника)

$$\cos^2 x – 2 \cos x \sin x = 0 \qquad \cos x (\cos x – 2 \sin x) = 0$$

Звідси $\cos x = 0$ або $\cos x – 2\sin x = 0$.

1) $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

2) $\cos x – 2\sin x = 0$; $\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos x} = 0$; $1 – 2\text{tg} x = 0$; $\text{tg} x = \frac{1}{2}$; $x = \text{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\text{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

<u>ІІ спосіб.</u> Розділимо обидві частини на $\sin^2 x$, оскільки $\sin x \neq 0$ в даному рівнянні, бо в супротивному випадку і $\cos x = 0$, що неможливо.

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{2 \cos x \sin x}{\sin^2 x} = 0,$$

$$\text{ctg}^2 x - 2\text{ctg}\, x = 0;$$

$$\text{ctg} x(\text{ctg}\, x - 2) = 0.$$

Звідси $\text{ctg}\, x = 0$, або $\text{ctg}\, x = 2$.

1) ctg $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

2) ctg $x = 2$; $x = \text{arcctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \text{arcctg}\, 2 + \pi n,\ n \in Z.$

Виконання вправ

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sin 2x - \cos^2 x = 0$; б) $2 \sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x$;

в) $3 \sin 2x + \cos 2x = \cos^2 x$; г) $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \text{arctg}\, \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z;$ б) $\pi n,\ \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;$

в) $\pi n,\ \text{arctg}\, 6 + \pi n,\ n \in Z$; г) $2\pi n,\ \frac{\pi}{2}$ + 2лл, $n \in Z.$

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $4\sin^2 x - \sin 2x = 3$; б) $\sin 2x + 4\cos^2 x = 1$;

в) $5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 = 0$; г) $2 \sin x + \cos x = 2$.

Відповідь: а) $\text{arctg}\, 3 + \pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;$ б) $\text{arctg} 3 + \pi n,\ -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

в) $-\text{arctg}\, 4 + \pi n,\ \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ 2\text{arctg}\, \frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

III. Підведення підсумків уроку.

IV. Домашнє завдання.

Розділ II § 3 (3). Запитання і завдання для повторення до розділу II № 17, 18.
Вправа № 2 (8; 17; 22; 28; 36).