УРОК 21

Тема уроку: Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь. Рівняння $\sin t = a$.

Мета уроку: Засвоєння учнями виведення і застосування формули для коренів рівняння $\sin t = a$.

Обладнання: Таблиця «Рівняння $\sin t = a$».

I. Перевірка домашнього завдання.

1. Відповіді на питання, що виникли при виконанні домашніх завдань.
2. Самостійна робота.

<u>Варіант 1</u>

Розв'яжіть рівняння:

а) $2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$. *(3 бали)* б) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. *(3 бали)*

в) $4\cos x = 4 - \sin x$. *(3 бали)* г) $\sin 3x \sin x - \cos 3x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *(3 бали)*

<u>Варіант 2</u>

Розв'яжіть рівняння :

а) $2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$. *(3 бали)* б) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. *(3 бали)*

в) $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$. *(3 бали)* г) $\sin^2\frac{x}{4} - \cos^2\frac{x}{4} = 1$. *(3 бали)*

Відповідь:

<u>В-l.</u> а) $\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ і $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$; в) $2\pi n,\ n \in Z$; г) $\pm\frac{5\pi}{24} + \pi n, n \in Z$.

<u>В-2.</u> а) $\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z$; б) $2\pi n$ і $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; в) $n + 2\pi n,\ n \in Z$; т) $4\pi n, n \in Z$.

II. Повідомлення теми уроку.

III. Сприймання і усвідомлення матеріалу про розв'язування рівняння $\sin t = a$.

Демонструється таблиця 9.

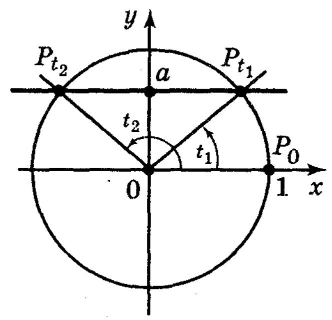


Рис. 123.

Пояснення вчителя

1) Якщо $|a| > 1$, то рівняння не має розв'язків, поскільки $|\sin x| \le 1$ для будь-якого t.
2) Якщо $|a| < 1$, то, враховуючи те, що $\sin t$ — ордината точки P_t одиничного кола, маємо: ординату, рівну a, мають дві точки одиничного кола (на осі OY відкладаємо число a і через цю точку проведемо пряму, перпендикулярну до осі ординат (рис. 123), яка перетне коло у двох токах - P_{t_1} і P_{t_2}):

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z,$$
$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ці дві формули можна записати у вигляді однієї формули:

$$\boxed{t = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z} \qquad (1)$$

Неважко впевнитися, що при парному $k = 2n$ маємо:

$t_1 = (-1)^{2n} \arcsin a + 2\pi n$ або $t_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z;$

при непарному $k = 2n + 1$ маємо:

$$t_2 = (-1)^{2n+1} \arcsin a + (2n + 1)\pi;$$
$$t_2 = -\arcsin a + 2\pi n + \pi;$$
$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

3) Якщо $a = 1$, то, враховуючи те, що $\sin t$ — це ордината точки P_t(одиничного кола, маємо: ординату, рівну 1, має точка P_t утворена із точки $P_0(1;0)$ поворотом на кут $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Отже, $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. Якщо $a = -1$, то $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$ "

4) Якщо $a = 0$, маємо $t = 0 + \pi n;\ t = \pi n,\ n \in Z.$

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо: $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Оскільки $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in$ є $Z.$

Відповідь: $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in$ є $Z.$

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо: $x = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

Оскільки $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$, то $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in Z;\ x = (-1)^{n+1} + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $(-1)^{n+1} + \pi n,\ n \in Z.$

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \sqrt{2} - 1$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо: $x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{2} - 1) + \pi n,\ n \in Z.$

Значення $\arcsin(\sqrt{2} - 1)$ знайдемо за допомогою мікрокалькулятора:

$\arcsin(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}427$, тоді $x \approx (-1)^n \cdot 0{,}427 + \pi n,\ n \in Z.$

Відповідь: $(-1)^n \cdot \arcsin(\sqrt{2} - 1) + \pi n \approx (-1)^n \cdot 0{,}427 + \pi n,\ n \in Z.$

IV. Осмислення вивченого матеріалу.

Коментоване виконання вправ

Розв'яжіть рівняння.

1. а) $2\sin x - 1 = 0$; б) $2\sin\frac{x}{2} = -1$; в) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; г) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$.

Відповідь: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$;

в) $\frac{\pi}{12} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$; г) $\frac{4\pi}{3} + (-1)^{n+1}\frac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$

2. а) $\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin 2x\cos 2x = -\frac{1}{4}$;

в) $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos 2x\sin 3x + \sin 2x\cos 3x = 1$.

Відповідь: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$;

в) $\frac{3\pi}{7}\ (-1)^n\frac{3\pi}{7} + 3\pi n,\ n \in Z$; г) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z$.

3. а) $(2\sin x - 1)(3\sin x + 1) = 0$; б) $(4\sin 3x - 1)(2\sin x + 3) = 0$.

Відповідь: а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$ і $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $(-1)^n\frac{\arcsin\frac{1}{4}}{3} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

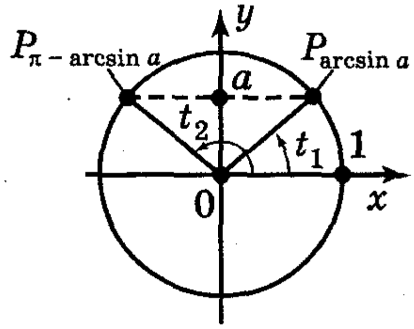
V. Підведення підсумків уроку.

VI. Домашнє завдання.

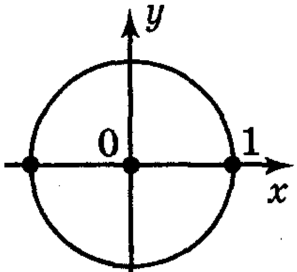
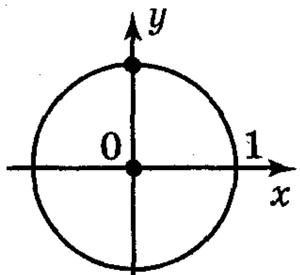
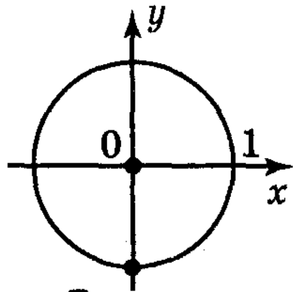
Розділ II § 2 (1). Запитання і завдання для повторення до розділу II № 13—15. Вправи № 1 (6; 7; 8; 14; 17; 18), № 2 (3).

Таблиця 9

Рівняння $\sin t = a$

$\lvert a\rvert > 1$	$\lvert a\rvert \le 1$
Коренів немає, бо $\lvert\sin t\rvert \le 1$.	 $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$

Окремі випадки

$\sin t = 0$	$\sin t = 1$	$\sin t = -1$
 $t = \pi n,\ n \in Z$	 $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	 $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$