УРОК 20

Тема уроку: Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь. Рівняння cos $t = a$.

Мета уроку: Засвоєння учнями виведення і застосування формули для знаходження коренів рівняння cos $t = a$.

Обладнання: Таблиця «Рівняння cos $t = a$».

І. Перевірка домашнього завдання.

Математичний диктант

Обчисліть:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arccos\frac{1}{2}$; 3) $\text{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) arctg (-l); 7) arcctg (-l); 8) cos (arccos l);

9) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 10) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 11) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$; 12) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Відповіді:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 8)1; 9) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 10) $\frac{\pi}{4}$; 11) $\frac{\pi}{6}$; 12) $\frac{\pi}{3}$.

ІІ. Мотивація навчання та повідомлення теми уроку.

Усім відомо, що квадратні рівняння можна розв'язувати за допомогою формули їх коренів, що значно спрощує роботу.

У математиці розглядають рівняння, у яких невідоме (змінна) входить тільки під знак тригонометричних функцій, наприклад:
cos t = 1, cos t + sin t = 0. Ці рівняння називаються тригонометричними рівняннями. Як правило, розв'язування будь-якого тригонометричного рівняння зводиться до розв'язування найпростіших рівнянь: sin $t = a$, cos $t = a$, tg $t = a$, ctg $t = a$.

Отже, наше завдання — вивести формули для розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь і навчитися розв'язувати тригонометричні рівняння, які приводяться до найпростіших.

На сьогоднішньому уроці розглянемо розв'язування рівняння cos $t = a$.

ІІІ. Сприймання і усвідомлення матеріалу про розв'язування рівняння cos t = *a*.

Демонструється таблиця 8.

Пояснення вчителя

1. Якщо $|a| > 1$, то рівняння cos $t = a$ не має розв'язків, по-скільки $|\cos t| < 1$ для будь-якого t.
2. Якщо $|a| < 1$, то враховуючи те, що cos t — абсциса точки P_t одиничного кола, маємо: абсцису, рівну a, мають дві точки (рис. 122) одиничного кола(на осі OX відкладемо число a і через побудовану точку

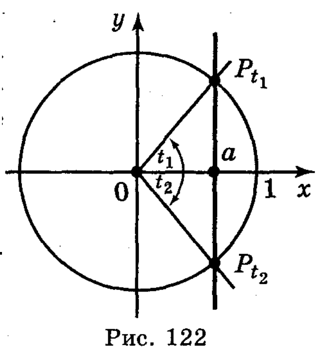


Рис. 122

проведемо пряму, перпендикулярну до осі абсцис, яка перетне коло у двох точках P_{t_1} і P_{t_2}. Тоді

$t_1 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$t_2 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ці розв'язки можна об'єднати

$$\boxed{t = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z} \qquad (1)$$

3. Якщо $a = 1$, то, враховуючи те, що $\cos t$ — це абсциса точки P_t одиничного кола, маємо: абсцису, рівну 1, має точка P_t утворена із точки $P_0(1;\ 0)$ поворотом на кути $2\pi n,\ n \in Z$. Отже, $t = 0 + 2\pi n = 2\pi n,\ n \in Z$.
4. Якщо $a = -1$, то маємо $t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. Корені рівнянь: $\cos t = 1$, $\cos t = -1$, $\cos t = 0$ також можна одержати із формули $t = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо:

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Оскільки $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то маємо: $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\cos x = \sqrt{2}$.

Розв'язання

Оскільки $\sqrt{2} > 1$, то рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів немає.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\cos x = 0{,}37$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо:

$$x = \arccos 0{,}37 + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Значення arccos 0,37 знайдемо за допомогою мікрокалькулятора: $\arccos 0{,}37 \approx 1{,}19$, тоді $x \approx \pm 1{,}19 + 2\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $\arccos 0{,}37 + 2\pi n \approx \pm 1{,}19 + 2\pi n,\ n \in Z$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання

Згідно з формулою (1) маємо: $x = \pm\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$.

Оскільки $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, то

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

IV. Осмислення вивченого матеріалу.

Виконання вправ

Розв'яжіть рівняння.

1. а) $-2\cos x = 1$; б) $\cos 2x - 1 = 0$; в) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; г) $\sqrt{2} - 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Відповідь: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $\pi n,\ n \in Z$; в) $\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; г) $\frac{\pi}{15} \pm \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z$.

2. а) $\cos x \cos 3x = \sin 3x \sin x$; б) $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 1$;
в) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0,5$; г) $2\sin^2 x = 1$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$; б) $2\pi n,\ n \in Z$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

3. а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; б) $\cos x + 3\cos x = 0$;
в) $4\cos^2 x - 3 = 0$; г) $\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$.

Відповідь: а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;
в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ і $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; г) $\frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

4. а) $(1 + \cos x)(3 - 2\cos x) = 0$;

Відповідь: а) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

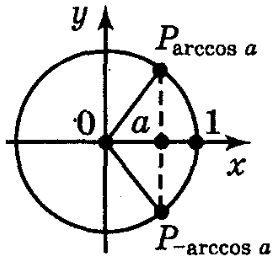
V. Підсумок уроку.

VI. Домашнє завдання.

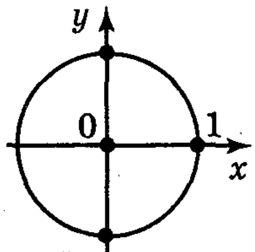
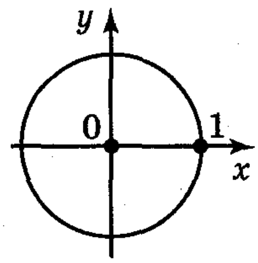
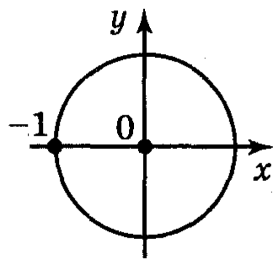
Розділ II § 2 (2). Запитання і завдання для повторення до розділу II № 13—15. Вправи № 1 (9; 10; 13), № 2 (2; 4; 7).

Таблиця 8

Рівняння $\cos t = a$

$\lvert a \rvert > 1$	$\lvert a \rvert \le 1$
Коренів немає, бо $\lvert \cos t \rvert \le 1$.	 $t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

Окремі випадки

$\cos t = 0$	$\cos t = 1$	$\cos t = -1$
 $t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	 $t = 2\pi n,\ n \in Z$	 $t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$