

УРОК 18

Тема уроку: Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

Мета уроку: Вивчення властивостей обернених тригонометричних функцій:
 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.

I. Перевірка домашнього завдання.

Математичний диктант.

Закінчіть математичні твердження:

1. Функція, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення називається ...
2. Оберненою до функцій $y = x + 3$ є функція ...
3. Оберненою до функцій $y = \sqrt{x-1}$ є функція ...
4. Оберненою до функцій $y = x^2$, $x > 0$ є функція ...
5. Графіки даної функції і оберненої до даної симетричні ...
6. Якщо дана функція $y = f(x)$ — зростаюча, то обернена до неї функція ...
7. Область визначення функції $y = f(x)$, для оберненої функції буде областю ...
8. Область значень функції $y = f(x)$ для оберненої функції буде областю ...

Відповідь: 1. оборотною. 2. $y = x - 3$. 3. $y = x^2 + 1$, $x \in [0; +\infty)$. 4. $y = \sqrt{x}$.
5. відносно прямої $y = x$. 6. зростаюча. 7. значень. 8. визначення.

II. Сприймання і усвідомлення поняття $\arcsin a$ і властивостей функції $y = \arcsin x$.

Як ви знаєте, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і приймає всі значення від -1 до 1, тобто кожне своє значення функція приймає в єдиній точці області визначення. Отже, рівняння $\sin x = a$, $|a| \leq 1$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь, який називається арксинусом числа a і позначається $\arcsin a$.



Арксинусом числа a називається таке число із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ синус якого дорівнює a .

Приклад 1. Знайдемо $\arcsin \frac{1}{2}$.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ бо } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ і } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Приклад 2. Знайдемо $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \text{ бо } \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ і } -\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin (-1)$;

г) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; е) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Відповідь: а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $-\frac{\pi}{6}$; е) $-\frac{\pi}{3}$.

2. Які із поданих виразів мають смисл і чому:

а) $\arcsin \left(-\frac{2}{3}\right)$; б) $\arcsin 1,5$; в) $\arcsin \pi$; г) $\arcsin (\sqrt{2}-1)$; д) $\arcsin \frac{1}{\pi}$?

Відповідь: а); г); д).

3. Знайдіть:

а) $\arcsin \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки кожному значенню $x \in [-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине значення $\arcsin x$, то можна говорити, що існує функція $y = \arcsin x$.

Графік функції $y = \arcsin x$ одержимо із графіка

функції $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (рис. 110).

Розглянемо властивості функції $y = \arcsin x$.

1. $D(y) = [-1; 1]$.

2. $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Графік симетричний відносно початку координат (функція непарна) $\arcsin (-x) = -\arcsin x$.

4. Функція зростаюча. Якщо $x_1 > x_2$ то $\arcsin x_1 > \arcsin x_2$

5. $y = 0$, якщо $x = 0$.

6. $y_{\max} = y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y_{\min} = y(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

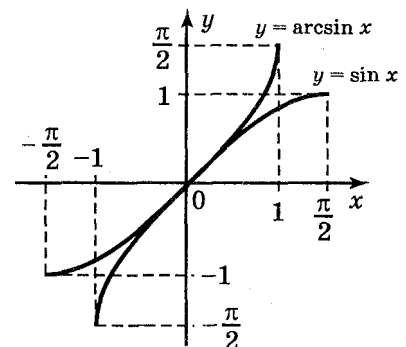


Рис. 110

Виконання вправ

1. Порівняйте числа:

а) $\arcsin 0,3$ і $\arcsin 0,2$; б) $\arcsin 0,3$ і $\arcsin (-0,3)$; в) $\arcsin \left(-\frac{1}{3}\right)$ і $\arcsin \left(-\frac{1}{4}\right)$.

Відповідь:

а) $\arcsin 0,3 > \arcsin 0,2$; б) $\arcsin 0,3 > \arcsin (-0,3)$; в) $\arcsin \left(-\frac{1}{3}\right) < \arcsin \left(-\frac{1}{4}\right)$.

2. Розташуйте в порядку зростання:

а) $\arcsin 0,4$; $\arcsin 0,2$; $\arcsin 0,8$;

б) $\arcsin (-0,1)$; $\arcsin (-0,2)$; $\arcsin (-0,3)$;

в) $\arcsin \frac{\pi}{6}$; $\arcsin (-0,3)$; $\arcsin 0,9$.

Відповідь: а) $\arcsin 0,2$; $\arcsin 0,4$; $\arcsin 0,8$;

б) $\arcsin (-0,3)$; $\arcsin (-0,2)$; $\arcsin (-0,1)$;

в) $\arcsin (-0,3)$; $\arcsin \frac{\pi}{6}$; $\arcsin 0,9$.

3. Знайдіть область визначення функцій:

а) $y = \arcsin (x + 1)$; б) $y = \arcsin (x^2 - 1)$; в) $y = \arcsin \frac{1}{x-1}$; г) $y = \arcsin 5x$.

Відповідь: а) $x \in [-2; 0]$; б) $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; в) $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; г) $x \in [-0,2; 0,2]$.

4. Знайдіть область значень функцій:

а) $y = \arcsin \sqrt{x}$; б) $y = \arcsin (-\sqrt{x})$.

Відповідь: а) $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

5. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \arcsin (x - 1)$; б) $y = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$; в) $y = \arcsin |x|$; г) $y = |\arcsin x|$.

Відповідь: а) рис. 111; б) рис. 112; в) рис. 113; г) рис. 114.

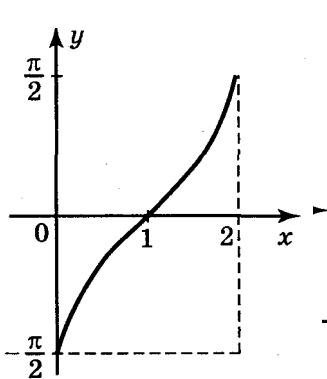


Рис. 111

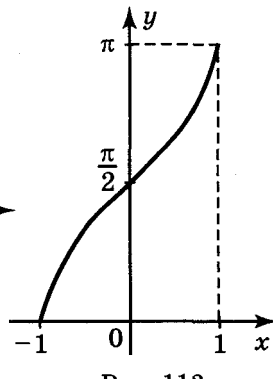


Рис. 112

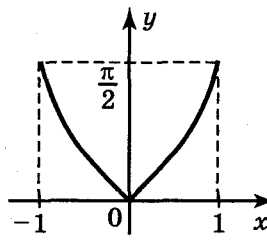


Рис. 113

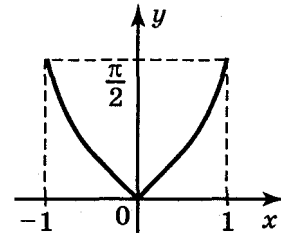


Рис. 114

III. Сприймання і усвідомлення поняття $\arccos a$ і властивостей функції $y = \arccos x$.

Функція $y = \arccos x$ спадає на відрізку $[0; \pi]$ і приймає всі значення від -1 до 1 , тому рівняння $\cos x = a$, $|a| < 1$ на проміжку $[0; \pi]$ має єдиний корінь, який називається арккосинусом числа a і позначається $\arccos a$.



Арккосинусом числа a називається таке число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a .

Приклад 1. Знайдіть $\arccos \frac{1}{2}$.

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$.

Приклад 2. Знайдіть $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \text{ бо } \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ і } \frac{3\pi}{4} \in [0;\pi].$$

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\arccos 0$;

г) $\arccos (-1)$; д) $\arccos 1$; е) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) π ; д) 0 ; е) $\frac{5\pi}{6}$.

2. Які з поданих виразів мають смисл і чому:

а) $\arccos \sqrt{2}$; б) $\arccos \frac{a^2}{a^2+1}$; в) $\arccos \frac{a^2+2}{a^2+1}$;

г) $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; д) $\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; е) $\arccos \frac{1}{\pi}$

?

Відповідь: б); д); е).

3. Знайдіть:

а) $\arccos\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; в) $\cos(\arccos(-1))$.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) -1 .

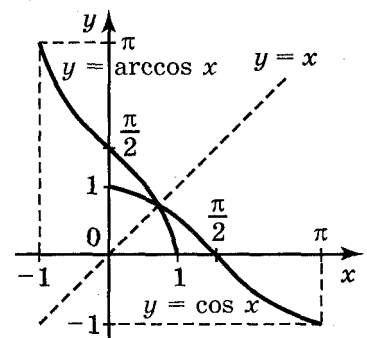


Рис. 115

Аналогічно можна говорити про функцію $y = \arccos x$. Графік функції $y = \arccos x$ одержимо із графіка функції $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = x$ (рис. 115).

Розглянемо властивості функції $y = \arccos x$.

1. $D(y) = [-1; 1]$.

2. $E(y) = [0; \pi]$.

3. Графік не симетричний ні відносно початку координат, ні відносно осі ОУ.

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

4. Функція спадна. Якщо $x_1 > x_2$ то $\arccos x_1 < \arccos x_2$.

5. $y = 0$, якщо $x = 1$.

6. $y_{\max} = y(-1) = \pi$, $y_{\min} = y(1) = 0$.

Виконання вправ

1. Порівняйте числа:

а) $\arccos 0,1$ і $\arccos 0,2$; б) $\arccos 0,1$ і $\arccos (-0,1)$; в) $\arccos (-0,2)$ і $\arccos (-0,3)$.

Відповідь: а) $\arccos 0,1 > \arccos 0,2$; б) $\arccos 0,1 < \arccos (-0,1)$;

в) $\arccos(-0,2) < \arccos(-0,3)$.

2. Розташуйте числа в порядку зростання:

а) $\arccos 0,55$; $\arccos 0,7$; $\arccos 0,1$;

б) $\arccos(-0,3)$; $\arccos(-0,7)$; $\arccos(-0,9)$;

$\frac{1}{\pi}$

в) $\arccos \frac{1}{\pi}$; $\arccos(-0,3)$; $\arccos(-0,7)$.

Відповідь: а) $\arccos 0,7$; $\arccos 0,55$; $\arccos 0,1$;

б) $\arccos(-0,3)$; $\arccos(-0,7)$; $\arccos(-0,9)$;

$\frac{1}{\pi}$

в) $\arccos \frac{1}{\pi}$; $\arccos(-0,3)$; $\arccos(-0,7)$.

3. Знайдіть область визначення функцій:

а) $y = \arccos(x - 1)$; б) $y = \arccos 2x$; в) $y = \arccos(x^2 + 1)$; г) $y = \arccos(|x| - 1)$.

Відповідь: а) $x \in [0; 2]$; б) $x \in [-0,5; 0,5]$; в) $x \in \{0\}$; г) $x \in [-2; 2]$.

4. Знайдіть область значень функцій:

а) $y = \arccos |x|$; б) $y = \arccos(-|x|)$.

Відповідь: а) $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

5. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \arccos(x - 1) - \frac{\pi}{2}$; б) $y = \arccos |x| - \frac{\pi}{2}$;

в) $y = \left| \arccos x - \frac{\pi}{2} \right|$; г) $y = \left| \arccos |x| - \frac{\pi}{2} \right|$.

Відповідь: а) рис. 116; б) рис. 117; в) рис. 118; г) рис. 119.

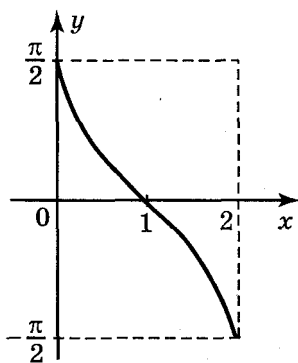


Рис. 116

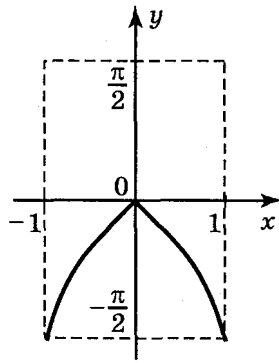


Рис. 117

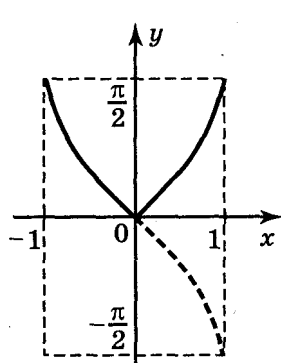


Рис. 118

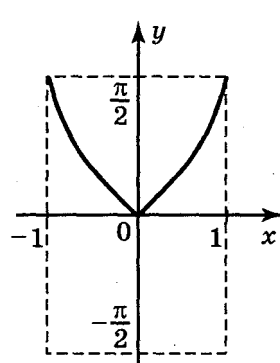


Рис. 119

IV. Підведення підсумку уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ II § 1 (2; 3). Запитання і завдання для повторення розділу II № 6; 7; 9; 10; 11; 12 (1, 2, 5, 6, 7, 8).