УРОК 17

Тема уроку: Поняття про обернену функцію.

Мета уроку: Формування понять: оборотна функція, обернена функція. Вивчення алгоритму знаходження формули функції, оберненої до даної, властивості графіків взаємно-обернених функцій.

І. Аналіз контрольної роботи.

ІІ. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

На уроках математики ви неодноразово розв'язували задачу: обчислити значення функції $y = f(x)$ при заданому значенні x_0 аргументу. Іноді потрібно розв'язати і обернену задачу: обчислити значення аргументу x, при якому функція $y = f(x)$ набуває даного значення y_0.

При розв'язуванні оберненої задачі виникають питання: Скільки таких значень існує? При яких умовах задача має єдиний розв'язок?

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай задано функцію $y = 2x + 1$. Щоб знайти значення аргументу x, при яких функція дорівнює y_0, треба розв'язати рівняння $y_0 = 2x + 1$. Розв'язавши його $2x = y_0 - 1$; $x = \frac{y_0 - 1}{2}$, маємо, що для будь-якого y_0 рівняння $y_0 = 2x + 1$ має і притому тільки один корінь.

Приклад 2. Для функції $y = x^2$ рівняння $y_0 = x^2$ при $y_0 > 0$ має два корені: $x_1 = -\sqrt{y_0}$; $x_2 = \sqrt{y_0}$.

!

Функція, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення, називається оборотною. Таким чином, функція $y = 2x + 1$ — оборотна, а функція $y = x^2$ (визначена на всій числовій осі) не є оборотною.

Залежність із прикладу 1: $x = \frac{y_0 - 1}{2}$ виражає x як деяку функцію від y (аргумент цієї функції позначений літерою y, а значення функції — літерою x). Перейшовши до звичних позначень (аргумент — x, функція — y), матимемо функцію: $y = \frac{x - 1}{2}$, яка називається оберненою до функції $y = 2x + 1$.

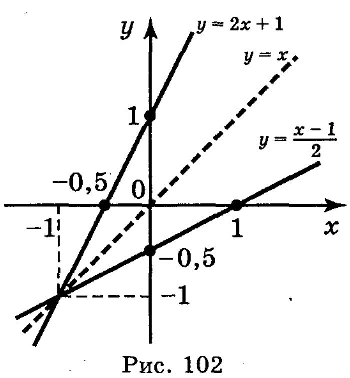

Рис. 102

Побудуємо графіки функцій $y = 2x + 1$ і $y = \frac{x - 1}{2}$ в одній системі координат (рис. 102), графіки цих функцій розташовані симетрично відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Виконання вправи.

З'ясуйте, чи оборотна функція $y=\frac{1}{x-1}$ в області її визначення. Якщо дана функція оборотна, то задайте обернену до неї функцію і побудуйте графіки даної і оберненої функцій.

Розв'язання.

Оскільки функція $y=\frac{1}{x-1}$ набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення ($x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$), то дана функція оборотна.

Розв'яжемо рівняння $y=\frac{1}{x-1}$ відносно *x:*

$y(x-1)=1$, $x-1=\frac{1}{y}$, $x=\frac{1}{y}+1$.

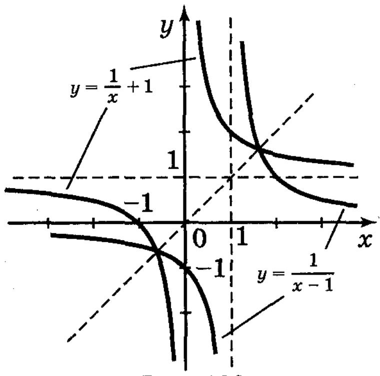

Рис. 103

Замінивши *x* на *y,* й *y* на *x* маємо $\mathbf{y}=\frac{1}{x}+1$ — обернену функцію *x* до функції $y=\frac{1}{x-1}$.

Побудуємо графіки функцій $y=\frac{1}{x-1}$ та $y=\frac{1}{x}+1$ в одній системі координат (рис. 103).

Підведемо підсумки:

1) Якщо функція у = *f(x)* задана формулою, то для знаходження оберненої функції потрібно розв'язати рівняння *f(x) = y* відносно *x,* а потім поміняти місцями *x* і *y.* Якщо рівняння *f(x) = y* має більше ніж один корінь, то функції, оберненої до функції *y = f(x)* не існує.
2) Графіки даної функції і оберненої до даної симетричні відносно прямої *y = x.*

   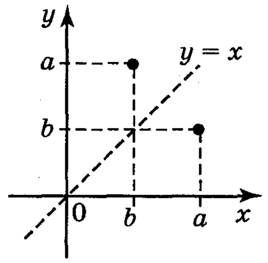

   Рис. 104

   Дійсно, при симетрії відносно прямої *y = x* вісь абсцис переходить у вісь ординат, а вісь ординат переходить у вісь абсцис, будь-яка точка *(a; b)* координатної площини при симетрії відносно прямої *y = x* переходить у точку *(b; a)* (рис. 104). Якщо точка *(a; b)* належить графіку даної функції, то точка *(b; a)* належить графіку оберненої функції, а ці дві точки симетричні відносно прямої *y = x.*
3) Якщо функція *y = f(x)* зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона оборотна. Обернена функція до даної, визначена області значень функції *y = f(x),* також є зростаючою (спадною).

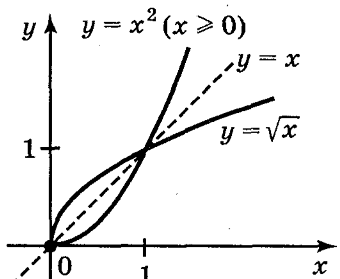

Рис. 105

Приклад 3. Функція $y=x^2$ не є оборотною в області визначення. Проте функція $y=x^2$, де $x \in [0; +\infty)$ зростає на цьому проміжку, тому має обернену. Оберненою функцією є функція $y=\sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображено на рис. 105.

<u>Виконання вправ</u>

1. Які із поданих функцій є оборотними в області визначення:

а) $y = 5x + 4$; б) $y = x^3 + 1$; в) $y = x^2 - 1$; г) $y = \frac{5}{x-5}$; д) $y = \sin x$; є) $y = \sqrt{x-2}$?

Відповідь: а); б); г); є).

2. Знайдіть функцію, обернену до даної:

а) $y = x - 3$; б) $y = \frac{1}{x}$; в) $y = \sqrt{x+1}$; г) $y = x^2$, де $x \in (-\infty; 0]$.

Відповідь: а) $y = x + 3$; б) $y = \frac{1}{x}$; в) $y = x^2 - 1$, де $x \in [0; +\infty)$; г) $y = -\sqrt{x}$.

3. На одному і тому же рисунку побудуйте графік даної функції і функції, оберненої до даної:

а) $y = x^2 - 1$, $x > 0$; б) $y = (x - 1)^2$, $x > 1$;

в) $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

Відповідь: а) рис. 106; б) рис. 107; в) рис. 108; г) рис. 109.

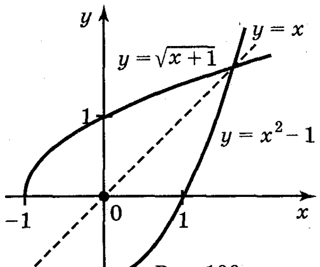

Рис. 106

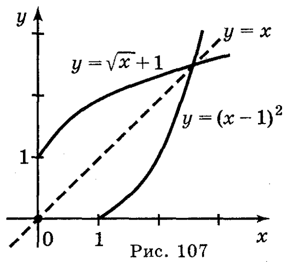

Рис. 107

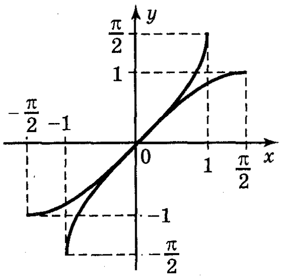
Рис. 108

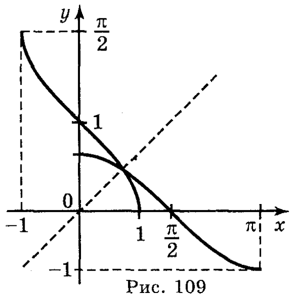
Рис. 109

4. Скільки коренів має рівняння (розв'язати графічно):

а) $x^3 + x = 2$; б) $\sin x = 1$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) $\sin x = 1$?

Відповідь: а) один; б) один; в) безліч.

III. Підсумок уроку.

Познайомилися з поняттями оборотної та оберненої функції, властивостями графіків даної функції та оберненої, властивостями монотонності даної функції та оберненої до даної.

IV. Домашнє завдання.

Розділ II § 1 (Поняття про обернену функцію). Запитання і завдання для повторення стор. 135 № 1—5.