УРОК 15

Тема уроку: Формули суми (різниці) однойменних тригонометричних функцій. Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

Мета уроку: Вивчення формул суми і різниці однойменних тригонометричних функцій і формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму. Формування умінь учнів застосовувати вивчені формули для спрощення виразів та обчислень.

Обладнання. Таблиця «Формули перетворення суми в добуток (добутку в суму)».

І. Перевірка домашнього завдання.

1. Два учні на дошці розв'язують № 26 (1) і 26 (2). Один учень в цей час коментує розв'язання № 52 (12).

2. Розв'язування аналогічних вправ. Спростіть вирази:

а) $tg(\pi+\alpha)\cdot tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

б) $ctg(\pi-\alpha)\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-tg(2\pi+\alpha)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

в) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg^2(\alpha-2\pi)}+\dfrac{\cos^2(\pi-\alpha)}{tg^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$;

г) $1-\dfrac{tg\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{ctg(\pi-\alpha)}+\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

Відповідь: а) $\cos^2\alpha$; б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; в) 1; г) $\text{tg}\,\alpha$.

ІІ. Повідомлення теми і завдань уроку.

ІІІ. Сприймання і усвідомлення нового матеріалу.

Демонструється таблиця 7.

Таблиця 7

Формули перетворення суми у добуток

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\quad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x\pm\sin y=2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2};\quad tgx\pm tgy=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y}.$$

добутку у суму

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y));$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).$$

Пояснення вчителя

1. Виведемо формулу перетворення суми синусів в добуток.

Позначимо $\frac{x+y}{2} = \alpha$, $\frac{x-y}{2} = \beta$, тоді $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$, і тому

1) $\sin x + \sin y = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta -$ $- \cos\alpha \cdot \sin\beta = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$. Отже, сума синусів дорівнює подвоєному добутку синуса півсуми на косинус піврізниці.

Для суми косинусів маємо:

2) $\cos x + \cos y = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta +$ $+ \sin\alpha\sin\beta = 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$. Отже, сума косинусів дорівнює подвоєному добутку косинуса півсуми на косинус піврізниці.

Для різниці косинусів маємо:

3) $\cos x - \cos y = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta -$ $- \sin\alpha\sin\beta = -2\sin\alpha\sin\beta = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ Отже, різниця косинусів дорівнює числу, протилежному подвоєному добутку синуса півсуми на синус піврізниці.

4) $\sin x - \sin y = \sin x + \sin(-y) = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$. Отже, різниця синусів дорівнює подвоєному добутку синуса піврізниці на косинус півсуми.

2. Для одержання формул перетворення добутку у суму випишемо підряд чотири формули:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y; \quad (1)$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y; \quad (2)$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y; \quad (3)$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y. \quad (4)$$

Віднявши почленно із рівності (4) рівність (3), одержимо:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x\sin y$$

або

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

Добуток синусів двох чисел дорівнює піврізниці косинуса різниці і косинуса суми цих чисел.

Додавши почленно рівності (4) і (3), маємо:

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x\cos y$$

або

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

Добуток косинусів двох чисел дорівнює півсумі косинуса різниці і косинуса суми цих чисел.

Додавши почленно рівності (1) і (2), одержимо

$$\sin(x-y) + \sin(x+y) = 2\sin x\cos y$$

або

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

Добуток синуса одного числа на косинус другого числа дорівнює півсумі синуса різниці і синуса суми цих чисел.

Виконання вправ

1. Спростіть вирази:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; б) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

в) $\sin\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

Відповідь: а) $\sqrt{2}\sin\beta$; б) $\sin 2\alpha$; в) $-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{3}\cos\alpha$.

2. Обчисліть:

а) $\cos 22° - \cos 38°$; б) $\sin 5° + \sin 55°$.

Відповідь: а) $\sin 8°$; б) $\cos 25°$.

3. Перетворіть в добуток:

а) $\cos 2\alpha + \cos 14\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha$;

б) $\sin 4\beta + \sin 10\beta + \sin 22\beta + \sin 16\beta$.

Відповідь: а) $4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha$; б) $4\cos 3\beta\cos 6\beta\sin 13\beta$.

4. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$; б) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}=ctg\alpha$.

IV. Підведення підсумків уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ І § 10 (5, 6). Запитання і завдання для повторення до розділу І № 69—70. Вправи № 52 (8; 15), № 53 (8; 15; 16)