УРОК 13

Тема *уроку:* Формули тригонометричних функцій суми і різниці двох чисел. Тригонометричні функції подвійного і половинного аргументу.

Мета *уроку:* Вивчення формул тригонометричних функцій суми і різниці двох чисел, формул тригонометричних функцій подвійного і половинного аргументу. Формування умінь застосовувати вивчені формули для спрощення виразів та обчислень.

І. Перевірка домашнього завдання.

Розв'язання вправ, аналогічних до домашніх: вправа № 40 (11), 44 (3).

ІІ. Сприймання і усвідомлення формул суми і різниці двох чисел.

1. Розглянемо, як пов'язані косинус різниці двох чисел із синусом і косинусом цих самих чисел.

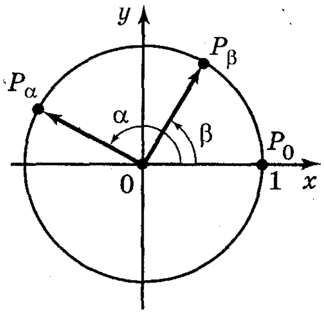

Рис. 101

На одиничному колі позначимо точки P_α і P_β ($\alpha > \beta$) проведемо вектори $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$, тоді $\overline{OP_\alpha}$ (cos α; sin α),
$\overline{OP_\beta}$ (cos β; sin β) (рис. 101).

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$, двома способами:

1) $\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

2) $\overline{OP_\alpha} \cdot \overline{OP_\beta} = \left|\overline{OP_\alpha}\right| \cdot \left|\overline{OP_\beta}\right| \cdot \cos(\alpha - \beta) = 1 \cdot 1\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta)$.

Звідси маємо, що

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$. (1)

Користуючись одержаною формулою, можна одержати інші формули:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$; (2)

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$; (3)

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$; (4)

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} \quad (5)$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} \quad (6)$$

Змінивши в формулі (1) β на –β і врахувавши, що cos(-β) = cos β, sin(-β) = -sinβ, одержимо

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta =$$

$= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

Таким чином,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Змінивши в останній формулі β на – β одержимо:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta)$$

Звідси $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Виведемо формулу тангенса суми чисел:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

.

Отже $$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Змінивши β на – β, одержимо $$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Виконання вправ

1. Знайдіть значення виразів:

а) $\cos 42° \cos 18° - \sin 42° \sin 18°$; б) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$;

в) $\sin 56° \cos 34° + \cos 56° \sin 34°$; г) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$;

д) $\frac{tg29^o+tg31^o}{1-tg29^o\cdot tg31^o}$; є) $\frac{tg\frac{7\pi}{16}-tg\frac{3\pi}{16}}{1+tg\frac{7\pi}{16}\cdot tg\frac{3\pi}{16}}$.

2. Спростіть вирази:

а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha \cdot \cos\beta$; б) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: а) $\cos\alpha \cdot \sin\beta$; б) $\sin 2\alpha$;

в) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Обчисліть: а) cos 75°; б) tg 15°; в) *ctg* 75°; г) $\sin\frac{\pi}{12}$..

Відповідь: а) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; б) tg15° = tg (45° - 30°) = 2 - $\sqrt{3}$; в) 2 - $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

ІІІ. Сприймання і усвідомлення тригонометричних функцій подвійного аргументу.

Демонструється таблиця “Тригонометричні функції подвійного аргументу” (табл. 6).

Таблиця 6

Тригонометричні функції подвійного аргументу
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

Коментарі вчителя

Виведемо формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 2α через функції аргументу α.

Скористаємося формулою $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$. Вважаючи $\beta = \alpha$, маємо:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Аналогічно із формули $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ при $\alpha = \beta$ одержуємо:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Із формули $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$ при $\beta = \alpha$, маємо: $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$.

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) $2\sin 15° \cos 15°$; б) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; в) $\frac{2tg15^o}{1-tg^2 15^o}$; г) $(\cos 75° - \sin 75°)$.

Відповідь: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{1}{2}$.

2. Обчисліть $\sin 2\alpha$, якщо а) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; б) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Відповідь: а) $-\frac{24}{25}$; б) $\frac{24}{25}$.

3. Спростіть:

а) $\sin \alpha \cos \alpha$; б) $\cos \alpha \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $2\cos^2 3\alpha - 1$;
г) $1 - 2\sin^2 5\alpha$; д) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$; є) $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

Відповідь: а) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$; б) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$; в) $\cos 6\alpha$; г) $\cos 10\alpha$; д) $\cos^2\alpha$; є) 1.

4. Доведіть тотожності:

а) $2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1$; б) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha} = ctg\alpha - 1$;

в) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot ctg\alpha = 1$; г) $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha} = tg\alpha$.

IV. Сприймання і усвідомлення тригонометричних функцій половинного аргументу.

За відомими значеннями тригонометричних функцій аргументу а можна знайти значення тригонометричних функцій аргументу $\frac{\alpha}{2}$ якщо відомо, у якій чверті лежить кут α.

Із формули $\cos 2x = cos^2x - \sin^2x$ при $x = \frac{\alpha}{2}$, одержуємо:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Запишемо основну тригонометричну тотожність у вигляді:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Складаючи почленно рівності (2) і (1) й віднімаючи почленно із рівності (2) рівність (1), одержуємо:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (3)$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Формули (3) і (4) можна записати так:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad (5)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad (6)$$

Формули (5) і (6) називають формулами синуса і косинуса половинного аргументу. Ці формули називають також формулами зниження степеня.

Виконання вправ

1. Знайдіть числові значення виразу:

а) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$; б) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin^2 15°$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos^2 15°$.

Відповідь: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) 1.

2. Нехай $\cos\alpha = 0{,}6$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Обчисліть: а) $\sin\frac{\alpha}{2}$; б) $\cos\frac{\alpha}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Відповідь: а) $\sqrt{0{,}2}$; б) $\sqrt{0{,}8}$; в) $\frac{1}{2}$.

3. Обчисліть: а) $\sin 15°$; б) $\cos 15°$; в) $\operatorname{tg} 22°30'$.

Відповідь: а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}$; в) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

4. Спростіть:

а) $\dfrac{1+cos2\alpha+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; б) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

Відповідь: а) 2cos α; б) tg α.

5. Доведіть тотожності:

а) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$; б) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=tg\alpha$; в) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=tg\alpha$.

V. Підведення підсумків уроку.

VI. Домашнє завдання.

Розділ I § 10 (1; 3; 4). Запитання і завдання для повторення до розділу I № 63—65, 67, 68. Вправа: № 51 (1, 2, 3, 6, 7). Розглянути приклади 1 (1-4), 2 (1-5), 3 (1-4), стор. 77-82.