УРОК 10

Тема уроку: Властивості тригонометричних функцій.

Мета уроку: Вивчення властивостей тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg } x$, $y = \text{ctg } x$ (область визначення; область значень; парність (непарність); симетричність графіків; періодичність; нулі; проміжки спадання (зростання); проміжки знакопостійності; найбільші і найменші значення).

І. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити правильність побудови графіків функцій вправи № 28 (а—г) за рисунками, зробленими до уроку.

ІІ. Вивчення властивостей тригонометричних функцій.

Властивості вивчених тригонометричних функцій зручно записати в таблицю 5. При заповненні таблиці можливі такі коментарі:

1. Вирази $\sin x$ і $\cos x$ визначені для будь-яких x, оскільки для будь-якого числа x можна знайти координати точки P_α, одиничного кола.

Вираз $\text{tg } x$ має смисл при будь-якому x, крім чисел виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in$ Z.

Вираз $\text{ctg } x$ має смисл при будь-якому x, крім чисел виду $x = \pi n$, $n \in$ Z.

2. Оскільки $\sin x$ і $\cos x$ — це ордината і абсциса точки P_α одиничного кола, то областю значення синуса і косинуса є проміжок [-1; 1].

Оскільки tg α — це ордината точки P_α лінії тангенсів, то областю значень тангенса є R.

Оскільки ctg α — це абсциса точки Q_α лінії котангенсів, то областю значень котангенса є R.

3. Оскільки точки P_α і $P_{-\alpha}$ одиничного кола (рис. 75) симетричні відносно осі OX, то ці точки мають однакові абсциси і протилежні ординати, тобто $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

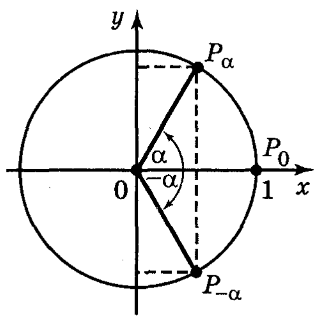

Рис. 75

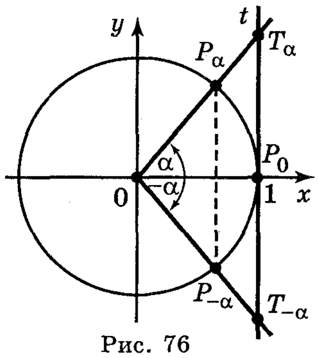

Рис. 76

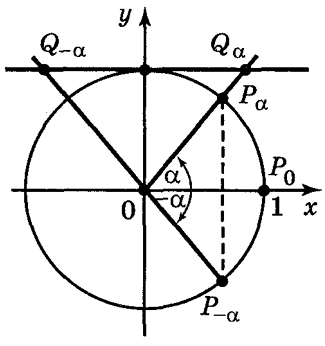

Рис. 77

Оскільки точки T_α і $T_{-\alpha}$ симетричні відносно P_0 лінії тангенсів, то $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.

Оскільки точки Q_α і $Q_{-\alpha}$ симетричні (рис. 77) відносно точки $P_{\frac{\pi}{2}}$ лінії котангенсів, то $\text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg}\,\alpha$.

Можна довести аналітичне, що tg α і ctg α непарні:

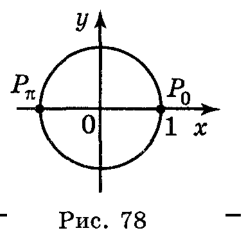

Рис. 78

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha$$,

$$ctg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha$$.

4. Див. урок 8.

5. Ординату, рівну нулю, мають дві точки (рис. 78) одиничного кола: (1; 0) і (-1; 0). Ці точки утворюються із точки (1; 0) поворотом на кути 0, π, 2π, 3π і т. д., а також на кути -π, -2π... Отже, sin x = 0, якщо $x = nk, n \in Z$.

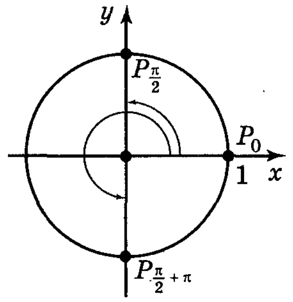

Рис. 79

Абсцису, рівну нулю, мають дві точки одиничного кола: (0; 1) і (0; —1). Ці точки утворюються із точки (1; 0) поворотом на кути $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ + π; $\frac{\pi}{2}$ + 2π і т.д., а також на кути - $\frac{\pi}{2}$; - $\frac{\pi}{2}$ + π; - $\frac{\pi}{2}$ + 2π , тобто на кути $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ (рис. 79). Отже, cos x = 0, якщо $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

7. 8. Див. урок 9.

9. 10. Якщо кут α змінюється від - $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то ордината точки P_α збільшується від -1 до 1, тобто sin α зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, враховуючи, що найменшим періодом синуса є 2π, робимо висновок, що sin α зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in$ Z (рис. 80). Якщо кут α змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то ордината точки P_α зменшується від 1 до -1, тобто sin α спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Враховуючи, що найменший період синуса є 2π, робимо висновок, що sin α спадає на проміжках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in$ Z.

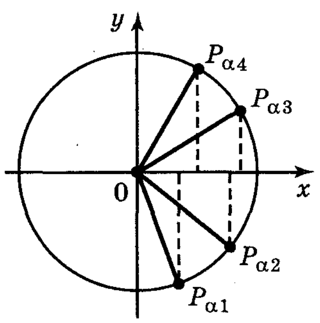

Рис. 80

Якщо кут α змінюється від 0 до π, то абсциса точки P_α зменшується від 1 до -1, тобто cos α спадає на проміжку [0; π], якщо кут α змінюється від -π до 0, то абсциса точки P_α збільшується від -1 до 1, тобто cos α зростає (рис. 81). Враховуючи, що найменший період косинуса є 2π, робимо висновок, що функція cos α спадає на проміжках [$2\pi n$; $\pi + 2\pi n$] і зростає на проміжках [$-\pi + 2\pi n$; $2\pi n$], $n \in$ Z.

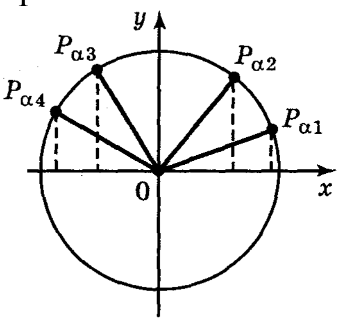

Рис. 81

При зміні кута α від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ ордината точки T_α лінії тангенсів збільшується від $-\infty$ до $+\infty$, тобто tg α зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Враховуючи, що найменший додатний період тангенса є π, робимо висновок, що tg α зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$ (рис. 82).

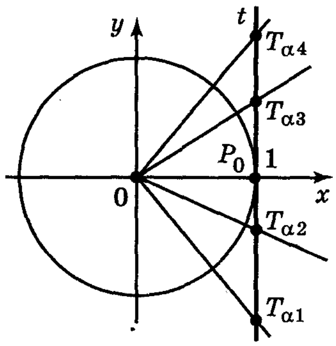

Рис. 82

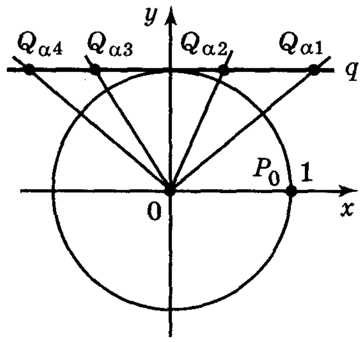

Рис. 83

При зміні кута α від 0 до π абсциса точки Q_α лінії котангенсів зменшується від $+\infty$ до $-\infty$, тобто ctg α спадає на проміжку (0; π). Враховуючи, що найменший додатний період котангенса є π, робимо висновок, що ctg α спадає на кожному з проміжків *(πn;* π + π*n), n* $\in$ *Z* (рис. 83).

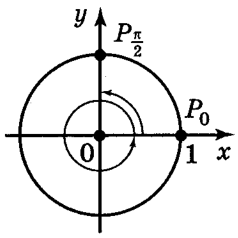

Рис. 84

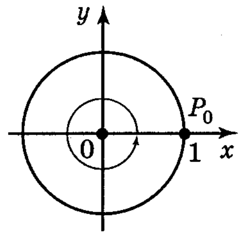

Рис. 85

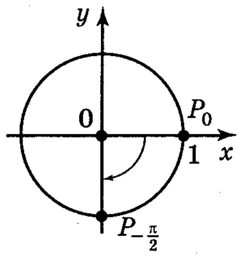

Рис. 86

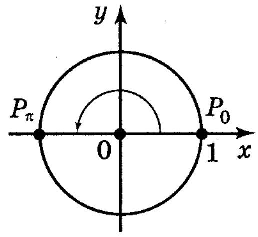

Рис. 87

11. Ординату, рівну 1, має точка (0; 1) одиничного кола (рис. 84). Цю точку отримаємо із точки (1; 0) поворотом на кути $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Отже, sin x = 1, якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Абсцису, рівну 1, має точка (рис. 85), утворена із точки (1; 0) поворотом на кути $2\pi n$, $n \in Z$. Отже, cos x = 1, якщо $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

12. Ординату, рівну -1, має точка (рис. 86), утворена із точки (1; 0) поворотом на кут $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. Отже, sin x = -1, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. Абсцису, рівну -1, має точка, утворена із точки P_α поворотом (рис. 87) на кут $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$. Отже, cos x = -1, якщо $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

ІІІ. Застосування властивостей тригонометричних функцій до розв'язування вправ.

Виконання вправ

1. Використовуючи властивості функції $y = \sin x$, порівняйте числа:

а) $\sin\frac{13\pi}{7}$ і $\sin\frac{11\pi}{7}$; б) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ і $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; в) sin 3 і sin 4; г) sin 1° і sin 1.

Відповідь: а) $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$; б) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;
в) sin 3 > sin 4; г) sin 1° < sin 1.

2. Розташуйте числа в порядку зростання:
а) sin 20°; sin 85°; sin 30°; б) sin 0,2; sin 0,3; sin 0,1; в) sin 2; sin (-2); sin (-1); sin 1.
Відповідь: а) sin 20°; sin 30°; sin 85°;
б) sin 0,1; sin 0,2; sin 0,3; в) sin (-2); sin (-1); sin 1; sin 2.

3. Використовуючи властивості функції $y = \cos x$, порівняйте числа:
а) cos 2,52 і cos 2,53; б) cos (-4,1) і cos (-4); в) cos 1 і cos 3; г) cos 4 і cos 5.
Відповідь: а) cos 2,52 > cos 2,53; б) cos (-4,1) > cos (-4);
в) cos 1 > cos 3; г) cos 4 < cos 5.

4. Розташуйте числа в порядку зростання:
а) cos 13°; cos 53°; cos 23°; б) cos 0,3; cos 0,6; cos 0,9; в) cos 2; cos 4; cos 6.
Відповідь: а) *cos* 53°; cos 23°; cos 13°; б) cos 0,9; cos 0,6; cos 0,3;
в) cos 4; cos 2; cos 6.

5. Використовуючи властивості функції $y = \text{tg}\, x$, порівняйте числа:
а) tg (-2,6π) і tg (-2,61π); б) tg 2,7π і tg 2,75π; в) tg 2 і tg 3; г) tg 1 і tg 1,5.
Відповідь: а) tg (-2,6π) > tg (-2,61π); б) tg 2,7π < .tg 2,75π;
в) tg 2 < tg 3; г) tg 1 < tg 1,5.

6. Розташуйте числа в порядку зростання:
а) tg 25°; tg 65°; tg 15°; б) tg (-1); tg (-2); tg (-3); в) tg (-5); tg (-3); tg 3.
Відповідь: а) tg 15°; tg 25°; tg 65°; б) tg (-1); tg (-3); tg (-2);
в) tg 3; tg (-3); tg (-5).

IV. Підсумок уроку.

V. Домашнє завдання.

Розділ І § 7. Запитання і завдання для повторення до розділу І № 52—56, Вправи № 18 (а—г), № 35 (1—4). Повторити розділ І §1-6.

Таблиця 5

№ п/п	Властивості	Функція			
		$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \text{tg}\, x$	$y = \text{ctg}\, x$
1	2	3	4	5	6
1.	$D(y)$	R	R	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$	$x \neq \pi n$, $n \in Z$
2.	$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R	R
3.	Парність	непарна $\sin(-x) = -\sin x$	парна $\cos(-x) = \cos x$	непарна $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\, x$	непарна $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}\, x$
4.	Періодичність,	2π	2π	π	π