УРОК 7

Тема уроку: Тригонометричні функції числового аргументу.

Мета уроку: Формування поняття тригонометричних функцій числового аргументу; вивчення значень тригонометричних функцій деяких чисел (кутів), зміни знаків тригонометричних функцій у координатних чвертях.

І. Перевірка домашнього завдання.

Розв'язування вправ аналогічних до домашніх.

1. Подайте в радіанній мірі кути:

а) 5°; б) 1140º; в) -765°; г) 67° 5'.

Відповідь: а) $\frac{\pi}{36}$; б) $6\frac{1}{3}\pi$; в) $-4\frac{1}{4}\pi$; г) $\frac{3\pi}{8}$.

2. Подайте в градусній мірі кути:

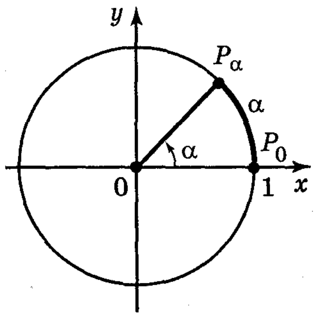
а) $\frac{7\pi}{12}$, б) 1,25π; в) 1; г) 10.

Відповідь: а) 105°; б) 225°; в) 57,32°; г) 573,25°.

3. Знайдіть довжину дуги, якщо на неї опирається центральний кут $\alpha = \frac{9\pi}{10}$, а радіус кола дорівнює 10 м.

Відповідь: 9π м.

ІІ. Сприймання і усвідомлення понять синуса, косинуса, тангенса і котангенса числа.



Розглянемо на координатній площині коло радіуса 1 з центром у початку координат, яке називається одиничним (рис. 43). Позначимо точку P_o — правий кінець горизонтального діаметра. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу α точку кола за такими правилом:

1) Якщо α > 0, то, рухаючись по колу із точки P_o в напрямі проти годинникової стрілки (додатний напрям обходу кола), опишемо по колу шлях довжиною а, кінцева точка цього шляху і буде шуканою точкою P_α.

2) Якщо α < 0, то, рухаючись із точки P_o (рис. 44) в напрямі за годинниковою стрілкою, опишемо по колу шлях довжиною |α|; кінець цього шляху і буде шукана точка P_α.

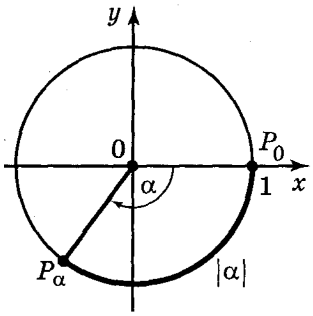


Рис. 44

3) Якщо α = 0, то поставимо у відповідність точку P_o.

Таким чином, кожному дійсному числу можна поставити у відповідність точку P_0 одиничного кола.

Якщо $\alpha = \alpha_o + 2\pi k$, де k — ціле число, то при повороті на кут α одержуємо одну і ту саму точку, що й при повороті на кут α_o.

Якщо точка P відповідає числу α, то вона відповідає і всім числам виду $\alpha + 2\pi k$, де 2π — довжина кола (бо радіус дорівнює 1), а k — ціле число, що показує кількість повних обходів кола в ту чи іншу сторону.

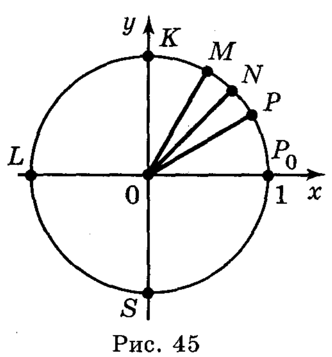


Рис. 45

Виконання вправ

1. Яким числам відповідають точки P_0, P, M, K, L, S (рис. 45), якщо відомо, що N — середина дуги P_0K, а дуги P_0P, PM, MK — рівні.

Відповідь: $2\pi n$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\pi+2\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

2. Позначте на одиночному колі точки, які відповідають числам:

а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, де $n\in \boldsymbol{Z}$;

б) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, де $n\in Z$.

Відповідь: а) рис. 46 (кожна чверть кола поділена на 2 рівні частини);

б) рис. 47 (кожна чверть кола поділена на 3 рівні частини).

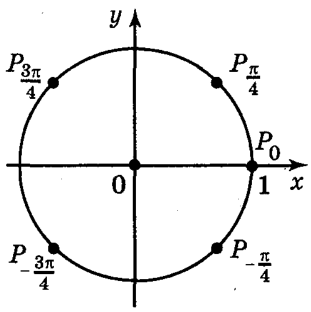


Рис. 46

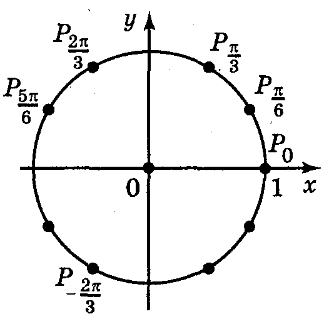


Рис. 47

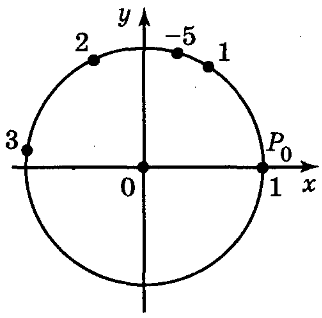


Рис. 48

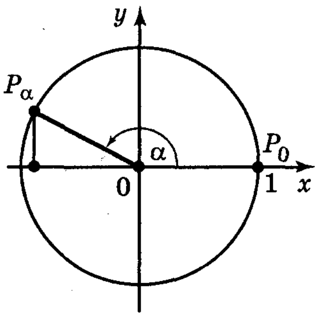


Рис. 49

3. Позначте на одиночному колі точки, які відповідають числам 1; 2; 3;-5. *Відповідь:* рис. 48.

Синусом числа α називається ордината точки P_α, утвореної поворотом точки P_α (1; 0) навколо початку координат на кут в α радіан (позначається sin α) (рис. 49).

Синус визначений для будь-якого числа α.

Косинусом числа α називається абсциса точки P_α, утвореної поворотом точки P_α (1; 0) навколо початку координат на кут в α радіан (позначається cos α) (рис. 49).

Косинус визначений для будь-якого числа α.

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) cos 7π; б) sin 7π; в) $\cos\frac{5\pi}{2}$; г) $\sin\frac{5\pi}{2}$.

Відповідь: а) -1; б) 0; в) 0; г) 1.

2. Обчисліть:

а) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; в) sin π + sin 1,5π; г) cos0 + cos 3,5π - cos 3π. *Відповідь:* а) 0; б) -1; в) -1; г) 2.

Тангенсом числа α називається відношення синуса числа α до його косинуса: $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

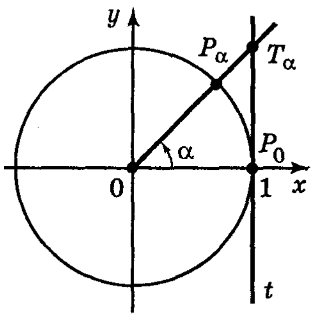


Рис. 50

Тангенс визначений для всіх а, крім тих значень, для яких cos α = 0, тобто, $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

Для розв'язування деяких задач корисно мати уявлення про лінію тангенсів (рис. 50). Проведемо дотичну t до одиничного кола в точці P_o. Нехай α — довільне число, для якого cos α ≠ 0, тоді точка P_α (cos α; sin α) не лежить на осі ординат і пряма OP_α перетинає t в деякій точці T_α з абсцисою 1. Знайдемо ординату точки T_α із трикутника OP_oT_α.

$\frac{y}{1}=tg\alpha$; y = tgα.

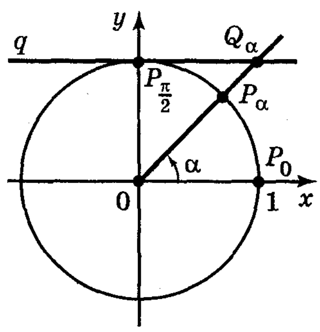


Рис. 51

Таким чином, ордината точки перетину прямих OP_α і t дорівнює тангенсу числа α. Тому пряму t називають віссю тангенсів.

!

Котангенсом числа α називається відношення косинуса числа α до його синуса: $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Котангенс визначений для всіх α, крім таких значень, для яких sin α $\neq$ 0, тобто, а = π *n*, *n* $\in$ *Z*.

Введемо поняття лінії котангенсів (рис. 51). Проведемо дотичну *q* до одиничного кола в точці $P_{\frac{\pi}{2}}$. Для довільного числа α, якщо sin α $\neq$ 0 і відповідно точка P_α (cos α, sin α) не лежить на осі *OX* і тому пряма OP_α перетинає пряму *q* у деякій точці Q_α з ординатою, що дорівнює 1. Із трикутника O $P_{\frac{\pi}{2}}$ Q_α маємо: $\dfrac{x}{1} = ctg\alpha$, звідси *x* = ctg α. Таким чином, абсциса точки перетину прямої OP_α і *q* дорівнює котангенсу числа α, тому пряму *q* називають віссю котангенсів.

Виконання вправ

1. Обчисліть: а) tg π; б) tg (-π); в) tg 4π; г) tg $\dfrac{3\pi}{2}$.

Відповідь: а) 0; б) 0; в) 0; г) не визначений.

2. Визначте знак числа: а) tg $\dfrac{3\pi}{4}$; б) tg $\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$; в) tg $\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$; г) ctg $\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) мінус; г) мінус.

III. Визначення значень тригонометричних функцій деяких чисел.

Через те що поворот на кут в α радіан співпадає з поворотом 180 на кут — $\dfrac{180}{\pi}$ α градусів, аргумент синуса і косинуса можна виразити як в градусах, так і в радіанах. Наприклад, при повороті точки (1; 0) на кут $\dfrac{\pi}{2}$, тобто на кут 90º, тому sin $\dfrac{\pi}{2}$ = sin 90° = 1, cos $\dfrac{\pi}{2}$ = cos 90° = O .

Заповнимо таблицю значень синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких чисел (таблиця 4) або розглянемо таблицю 2 (стор. 31) підручника і виконаємо вправу 1.

Таблиця 4

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існ.	0	не існ.	0
ctg α	не існ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існ.	0	не існ.

Значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса інших чисел можна знайти за допомогою математичних таблиць або калькулятора.

Виконання вправ

1. Обчисліть:

а) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\text{tg}\frac{\pi}{3}$; б) $5\sin\frac{\pi}{4}+3\text{tg}\frac{\pi}{4}-5\cos\frac{\pi}{4}-10\text{ctg}\frac{\pi}{4}$;

в) $\left(2tg\frac{\pi}{6}-tg\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$; г) $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\text{tg}\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: а) $\frac{3}{2}$; б)-7; в) $-\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{4}$.

2. Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора:

а) sin 1,5; б) cos 0,5; в) $\text{tg}\frac{27\pi}{3}$; г) $\text{ctg}\frac{\pi}{9}$.

Відповідь: а) 1,00; б) 0,88; в) 3,08; г) 2,75.

IV. Вивчення зміни знаків тригонометричних функцій.

Число sin α — це ордината відповідної точки P_α, тому sin α > О, якщо точка розташована вище осі абсцис, тобто в I і II чвертях (рис. 52). Якщо ця точка лежить нижче осі абсцис, то її ордината від'ємна в третій і четвертій чвертях.

Число cos α — це абсциса точки P_α, тому cos α > 0 в I та IV чвертях, cos α < 0 в II та III чвертях (рис. 53).

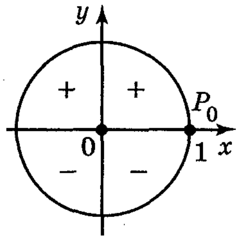


Рис. 52

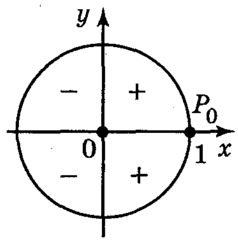


Рис. 53

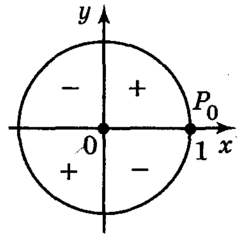


Рис. 54

Так як $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то tg α > 0 і ctg α > 0, якщо sin α і cos α мають однакові знаки, тобто в I і III чвертях, і tg α < 0 і ctg α < 0 в II і IV чвертях (рис. 54).

Виконання вправ

1. У якій чверті знаходиться точка P_α, якщо:
   а) sin α > 0 і cos α > 0; б) sin α > 0 і cos α < 0;
   в) sin α < 0 і cos α > 0; г) sin α < 0 і cos α < O?
   Відповідь: а) I; б) II; в) IV; г) III.
2. Якій чверті належить P_α, якщо:
   а) sin α cos α > 0; б) sin α cos α < 0;
   в) tg α cos α > 0; г) ctg α sin α < 0?
   Відповідь: а) I або III; б) II або IV; в) I або II; г) II або III.
3. Знайдіть знак виразу:

а) cos $\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$; б) sin $\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$; в) ctg (π + α); г) tg $\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$, якщо $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) плюс; г) плюс.

4. Визначте знак виразу:

а) sin105° – cos105°; б) cos155° – sin255°; в) tg127° · ctg200°; г) tg351° · ctg220°.

Відповідь: а) мінус; б) плюс; в) мінус; г) мінус.

5. Визначте знак добутку:

а) tg 2 · tg 3 · ctg 3 · cos 1; б) sin 1 · cos 2 · tg 3 · ctg 4.

Відповідь: а) мінус; б) плюс.

V. Підсумок уроку.

VI. Домашнє завдання.

Розділ I § 4. Запитання і завдання для повторення до розділу I № 40—42, 46. Вправи № 10, 12, 16, 21.