Урок 14

Тема. ***Теореми і аксіоми.***

Мета. Ознайомити учнів з поняттями *теорема, аксіома, означення, ознака*, з доведенням методом від супротивного.

Вимоги до підготовки учнів. У результаті вивчення теми учні мають уміти пояснити, що таке аксіома, теорема, ознака, означення, доведення, метод доведення від супротивного.

Методичні вказівки

На уроці слід в доступній для семикласників формі пояснити, що таке *аксіома, теорема, означення*, розкрити зміст понять: *умова і висновок теореми, ознака, обернена теорема*.

Ознака — це теорема, яка встановлює критерій існування чи виконання чого-небудь. Учням відома, наприклад, ознака подільності натуральних чисел на 3. її формулюють здебільшого у вигляді двох тверджень (прямого й оберненого). Тому нерідко пояснюють, що ознака обов'язково включає достатню умову і необхідну умову. Це не завжди так. У математиці ознаками часто називають тільки достатні умови або тільки необхідні. Стосовно паралельності прямих також правильне таке твердження:

Дві прямі паралельні тоді і лише тоді, коли січна утворює з ними рівні внутрішні різносторонні кути.

Тут одним реченням сформульовано дві теореми. Одну з них — достатню умову — в підручнику названо ознакою паралельності прямих, а другу — властивістю. Хоч вони за змістом досить близькі, але за способами доведення — з різних геометрій: абсолютної і евклідової. Тому їх звичайно не об'єднують.

До теорем відносимо тільки правильні доводжувані твердження.

Семикласникам не обов'язково наголошувати, що аксіоми і теореми — твердження (висловлення), а означення — не твердження. Це краще зробити пізніше.

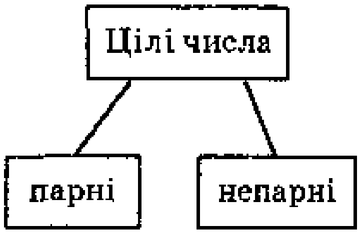
Корисно звернути увагу учнів на доведення *методом від супротивного*. У підручнику [2, с. 28] пояснено: "Цей спосіб доведення полягає в тому, що спочатку робимо припущення, протилежне тому, яке стверджується теоремою..." Тут неправильно вжито слово *протилежне* замість *супротивне*. З погляду логіки це принципово різні поняття.

Доводячи теорему методом від супротивного, треба спростовувати не протилежне до даного твердження, а супротивне. Щоб краще зрозуміти суть питання, бажано з'ясувати, які два твердження називають *протилежними*, а які *супротивними*. Розглянемо для прикладу два висловлення: "число *а* парне" і "число *а* непарне".

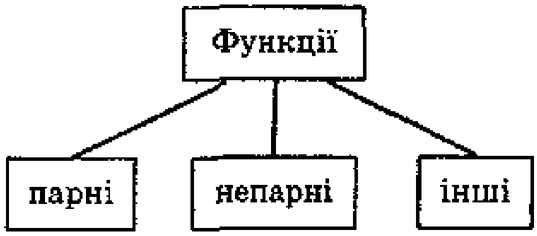
Якщо йдеться про одне і те саме конкретне ціле число а, то ці два висловлення супротивні: коли одне з них неправильне, то друге обов'язково правильне. Чи можна подібний висновок зробити стосовно здавалось би аналогічних висловлень: "функція $f(x)$ парна" і "функція $f(x)$ непарна"?

Ні. Бо існують і такі числові функції $f(x)$, для яких кожне з двох сформульованих висловлень неправильне. Ці два висловлення протилежні, але не супротивні. Різниця в тому, що у множині цілих чисел, крім парних і непарних, ніяких інших немає (мал. 25). А крім парних і непарних числових функцій існують і такі, які не є ні парними, ні непарними (мал. 26). Для висловлення "функція $f(x)$ парна" супротивним є: "функція $f(x)$ не є парною" .

Протилежні, але не супротивні також висловлення про дійсні числа: "число a додатне" і "число a від'ємне". А от висловлення "число a додатне" і "число a не додатне" не тільки протилежні, а й супротивні. Бо об'єднання додатних і не додатних чисел становить множину дійсних чисел. Два твердження $T(A)$ і $T(B)$ про під множини A і B якоїсь універсальної множини U бувають супротивними, якщо множина U дорівнює об'єднанню A і B.



Мал. 25



Мал. 26

Логічною основою методу доведення від супротивного *є закон виключеного третього*. Формулюють його так. **Два супротивні твердження одночасно не можуть бути хибними; одне з них обов'язково істинне, друге хибне, а третього не може бути.** Саме тому, спростувавши одне з двох взаємно супротивних тверджень, можна стверджувати, що друге істинне. Для протилежних тверджень закон виключеного третього не справджується. Два протилежні твердження одночасно можуть бути хибними. Тому, **спростувавши одне з двох протилежних тверджень, не можна стверджувати, що друге твердження істинне.**

У рубриці "Для допитливих" запитується, чи в кожному трикутнику середини сторін і основи висот лежать на одному колі. На цьому уроці краще на це запитання не відповідати, а дати можливість допитливим учням самостійно пошукати відповідь. Тільки через кілька днів можна відповісти, що таку властивість має кожний трикутник. А ще доповнити відповідь, сказавши, що це коло проходить і через середини відрізків, які сполучають точку перетину висот трикутника з усіма його вершинами, і що таке коло називають колом дев'яти точок або колом Ейлера. Звичайно, у 7 класі розглядати це питання не обов'язково.

Робота з матеріалом підручника

Для роботи в класі: § 8; № 225—235, 237, 238, 240—242, 244, 245, 248.

Для роботи вдома: § 8; ЗДС (с. 73); № 236, 239, 243, 246, 247, 249.

Вказівки до розв'язування задач

233. Якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює 180°.

234. Якщо $a \parallel b$ і $a \parallel c$, то $b \parallel c$. Можна писати і так: якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Або ще коротше: ($a \parallel b$ і $b \parallel c$) $\rightarrow a \parallel c$.

235. Твердження а) і б) неправильні, бо рівними бувають не тільки вертикальні кути.

Твердження в) правильне, бо будь-які два вертикальні кути рівні.

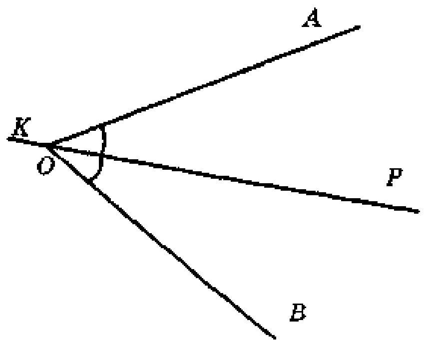
235. Якщо сума мір двох кутів дорівнює 180°, то ці кути суміжні. Це твердження неправильне.

236. Якщо прямі паралельні, то відповідні кути, утворені ними з січною, дорівнюють один одному. Це твердження правильне.

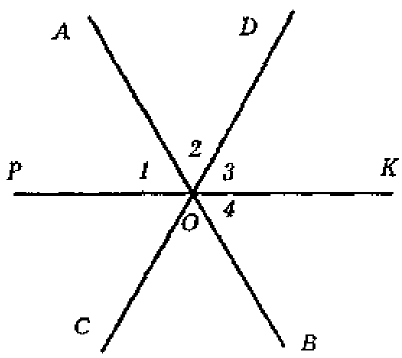
237. Кути з відповідно паралельними сторонами рівні або їх сума дорівнює 180°.

239. а) Ні. Бісектриса кута — промінь, а не пряма.

б) Ні. Наприклад, промінь *KP* ділить кут *AOB* на рівні частини, але не є його бісектрисою (мал. 27).



Мал. 27



Мал. 28

241. Ні. Бо мимобіжні прямі також не перетинаються.

242. Твердження 1 правильне, а 2 неправильне. Бо, наприклад, сума чисел 13, 4 і 8 ділиться на 5, а жодне з них на 5 не ділиться.

243. Кут між бісектрисами двох вертикальних кутів розгорнутий (мал. 28). Адже якщо *OP* і *OK* — бісектриси вертикальних кутів *AOC* і *BOD*, то $\angle AOB = 180°$ і $\angle 1 = \angle 4$, тому $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Кут між бісектрисами двох суміжних кутів — прямий.

244. а) Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

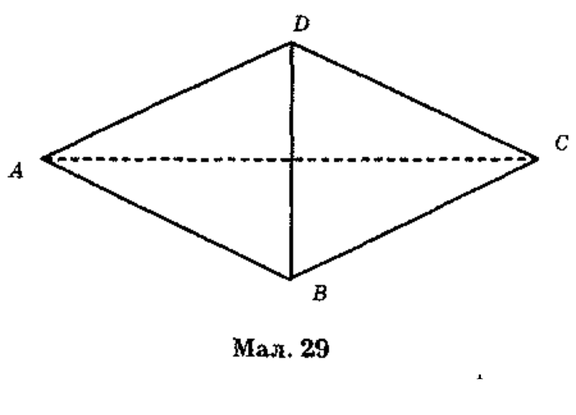
б) Дві прямі однієї площини, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні одна одній.

Твердження а) правильне і для простору (це доводиться в 10 класі), а твердження б) для простору неправильне.

246. а) Неправильне, бо кути *A* і *C* вертикальні; б) неправильне; в) неправильне. Наприклад, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то ребра *AB* і BB_1 лежать в одній площині, BB_1 і B_1C_1 — в другій, а *AB* і B_1C_1 не лежать в одній площині.

247. На малюнку 29 ребра AB і PC піраміди зображено паралельними відрізками, хоч насправді вони не паралельні. Не паралельні і ребра *AP* і *BC*.

248. Січна с перетинає паралельні прямі *a* і *b* так, що внутрішні



Мал. 29

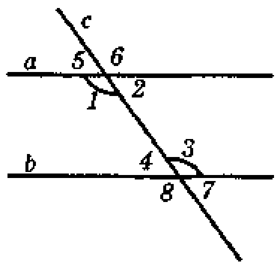
різносторонні кути 1 і 3 рівні, а) Оскільки $\angle 1 = \angle 6$ і $\angle 8 = \angle 3$ як вертикальні, то кути 6 і 8 рівні, б) Оскільки $\angle 1 = \angle 8$ і $\angle 1 + \angle 5 = 180°$, то і $\angle 8 + \angle 5 = 180°$ (мал. 30). Подібним способом можна показати, що коли $a \parallel b$, то $\angle 5 = \angle 7$ і $\angle 6 + \angle 7 = 180°$.

249. Спочатку розглянемо випадок, коли дані кути з відповідно перпендикулярними сторонами мають спільну вершину *O* (мал. 31). Якщо $OK \perp OA$ і $OB \perp OP$, то $\angle 1 = 90° - \angle 2 = \angle 3$.

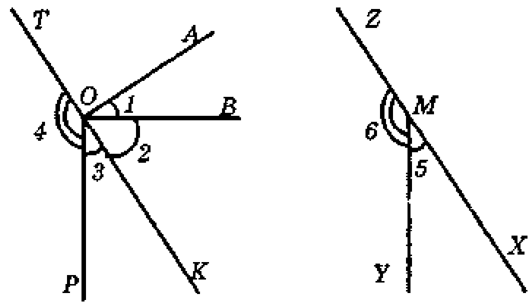
Якщо кути 3 і 4 суміжні, то $\angle 4 + \angle 1 = \angle 4 + \angle 3 = 180°$.

Якщо $MX \perp OA$ і $MY \perp OB$, то $\angle 5 = \angle 3$ як кути зі спів-напрямленими сторонами (див. с. 65 підручника).

Отже, $\angle 5 = \angle 1$, $\angle 6 + \angle 1 = 180° - \angle 5 + \angle 1 = 180°$.



Мал. 30



Мал. 31